23.05.18

Wiederholung

Hermitsche Interpolationsaufgabe $f \in C^k([a,b])$, $a \leq x_0 = \ldots = x_{k_0} < x_{k_0+1} < \ldots < x_n \leq b$

Interpolationsbedingungen: $p_n \in \mathbb{P}_n$ mit

$$p_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \quad k = 0, 1, \ldots, k_0$$

$$p_n(x_k) = f(x_k), \quad k = k_0+1, \ldots, n$$

Eindeutige Lösung: $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, \ldots, x_k] \prod (x - x_i)$

+ Fehlerformel für $f \in C^{n+1}([a,b])$

Approximationseigenschaft: $\| f - p_n \|_\infty \leq (1 + \underbrace{\Lambda_n}_{\text{Lebesgue-Konstante}}) \| f - p_n^* \|_\infty$

Λ hängt nur von den Stützstellen ab:

Λ_n möglichst klein

3.11 Eine gute und eine schlechte Nachricht

Satz: (Weierstraß 1885)

Für jedes $f \in C([a,b])$ gilt $E_n(f) \xrightarrow{n \to \infty} 0$.

Beweis: siehe Hämmerlin und Hoffmann

Satz: Für jede Folge von Stützstellen $x_0^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$
o. B.
gibt es ein $f \in C([a,b])$, sodass

$$\liminf_{n \to \infty} \| f - p_n \|_\infty > 0$$

Fazit: Es kann also $\| f - p_n \|_\infty \not\to 0$, obwohl

$\| f - p_n^* \|_\infty \to 0$.

Es muss daher $\Lambda_n \xrightarrow{n \to \infty} \infty$ (für jede Folge von Stützstellen)

Untere Schranke:

Satz: (Brutman, de Boor, Pinkens 1978)

Für jede Folge von Stützstellen gilt

$$\frac{2}{\pi}\log(n+1) + \frac{2}{\pi}\left[\gamma + \log\left(\frac{4}{\pi}\right)\right] \leq \Lambda_n ,$$

wobei $\gamma := \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i} - \log n\right) \approx 0.577$

Euler-Mascherone-Konstante

3.12 Tschebyscheff-Stützstellen

Satz: (Turetskii 1940)

Für äquidistante Stützstellen ist $\Lambda \sim e^{-1}\dfrac{2^{n+1}}{n\cdot\log(n)}$.

D.h. Λ_n wächst exponentiell $\Rightarrow$ Vermeide äquidistante Stützstellen

Idee: Suche Stützstellen, sodass

$$\Lambda_n = \|w_{n+1}\|_\infty = \left\|\prod_{k=0}^{n}(x - x_k^{(n)})\right\|_\infty \text{ klein}$$

$$w_{n+1}(x) = x^{n+1} - q \quad , \; q \in \mathcal{P}_n$$

Finde $q \in \mathcal{P}_n$, sodass $\|x^{n+1} - q\|_\infty$ minimal wird.

Aus (2.12): Lösung ist $q = x^{n+1} - \frac{1}{2^n}T_{n+1}$

$\left(w_{n+1} = \frac{1}{2^n}T_{n+1}\right)$, $T_n(x) = \cos(n\arccos(x))$

Die optimalen Stützstellen sind gerade die Nullstellen von T_{n+1}: $\quad x_k^{(n)} = \cos\left(\dfrac{2(n-k)+1}{2(n+1)}\pi\right)$, $k = 0, \dots, n$

auf $[-1,1]$

Satz: (Revlin 1974)

Für die Tschebyscheff-Stützstellen gilt:

$$\frac{2}{\pi}\log(n+1) + \underbrace{\frac{2}{\pi}\left(\gamma + \log\left(\frac{8}{\pi}\right)\right)}_{\approx 0.96} \leq \Lambda_n \leq 1 + \frac{2}{\pi}\log(n+1)$$

fast optimal

23.05.18

III.2 Spline-Interpolation

3.13 Motivation: - Oft ist f nicht ausreichend regulär.
- schlechte Kondition für äquidistante Stützstellen

$\Rightarrow$ Verzichte auf globale Polynome, verwende stückweise Polynome

3.14 Splines m-ter Ordnung

Notation: $\Delta = \{x_0, \dots, x_n\}$ Gitter / Stützstellen mit

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

$J_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, n$

$h_k = x_k - x_{k-1}$, $h = \max_k h_k$ Feinheit von Δ

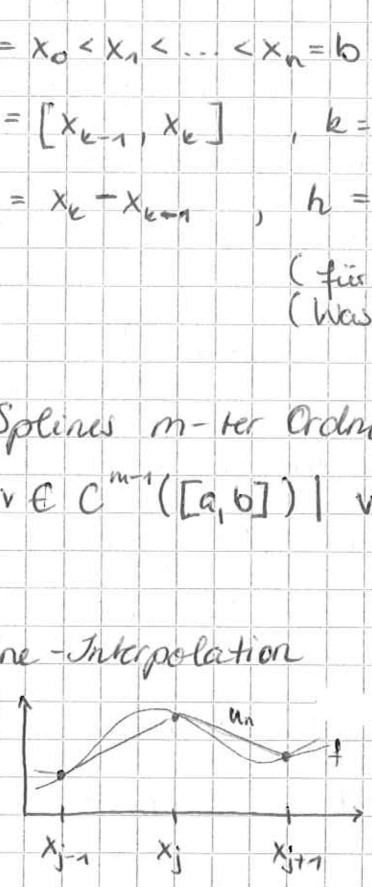
(für Fehlerabschätzung)
(Was passiert für $h \to 0$?)

Definition: Splines m-ter Ordnung zum Gitter Δ:

$$S_\Delta^m = \left\{ v \in C^{m-1}([a,b]) \mid v|_{J_k} \in \mathcal{P}_n ,\ k = 1, \dots, n \right\}$$

3.15 Lineare Spline-Interpolation

"Linienzug"



$u_n \in S_\Delta^1$

Fehlerabschätzung: Sei $f \in C^2([a,b])$. Dann

$$\| f - u_n \|_\infty \leq h^2 \cdot \frac{\| f'' \|_\infty}{8}$$

Beweis:

Sei k so, dass $x \in J_k = [x_{k-1}, x_k]$

$$| f(x) - u_n(x) | \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fehlerformel 3.7}}}{\leq} \frac{\| f'' \|_\infty}{2!} \underbrace{| \omega_2(x) |}_{= (x - x_k)(x - x_{k-1})}$$

$$\leq \frac{\| f'' \|_\infty}{2} \cdot \frac{h^2}{4} \qquad \square$$

3.16 Interpolation mit Splines

Gesucht: $s_n \in S_\Delta^m$

$S_n(x_k) = f(x_k)$, $k = 0, \dots, n$
(Interpolationsbedingungen)

$p_k^{(j)}(x_k) = p_{k+1}^{(j)}(x_k)$, $k = 1, \dots, n-1$, $j = 0, \dots, m-1$
(Übergangsbedingungen / Verheftungsbedingungen)

$s_n|_{I_k} = p_k \in \mathcal{P}_m$ ($m > 1$: glatter Übergang)

Freiheitsgrade: $p_k \in \mathcal{P}_m$, $k = 1, \dots, n$

$(m+1)$ Koeffizienten für insgesamt n Intervalle

$\Rightarrow$ $n(m+1)$ Unbekannte

Übergangsbedingungen: $(n-1)m$ linear unabhängige Bedingungen

$$\Rightarrow \dim S_\Delta^m = n(m+1) - (n-1)m = n + m$$

Interpolationsbedingungen: $n+1$

$\Rightarrow$ Dimension des Lösungsraums der Interpolationsaufgabe:

$$\dim S_\Delta^m - (n+1) = m - 1$$

$m = 1$: Lösung ist eindeutig (Linienzug)

$m > 1$: wir brauchen $m-1$ zusätzliche Bedingungen

z.B. $m = 3$ (kubische Splines):

$S_n'(a) = f'(a)$, $S_n'(b) = f'(b)$ (vollständige Randbedingungen)

motiviert aus der Kontinuumsmechanik:

3.17 Balkenbiegung (Schönberg 1946)

Fixiere Balken in den Punkten $(x_k, f(x_k))$ drehbar und fixiert bei $x_0 = a$, $x_n = b$ in die Richtung $f'(a)$ und $f'(b)$.

Biegelinie: $\varphi \in C_\Delta^2([a,b]) = \{v \in C^2([a,b]) \mid v(x_k) = f(x_k),\ k = 0, \dots, n\}$

eingespannte Enden: $\varphi'(a) = f'(a)$, $\varphi'(b) = f'(b)$

23.05.18

Biegelinie minimiert Biegespannung:

$$\mathcal{E}(\varphi) = \int_a^b \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Krümmung}}}{k^2(x)}\, dx = \int_a^b \frac{\varphi''(x)^2}{[1+\varphi'(x)^2]^3}\, dx$$

D.h. φ erfüllt: $\mathcal{E}(\varphi) \leq \mathcal{E}(v) \quad \forall v \in H$ mit

$$H = \left\{ v \in C^2_\Delta([a,b]) \;\middle|\; \begin{array}{l} v'(a) = f'(a), \\ v'(b) = f'(b) \end{array} \right\}$$

Annahme: $|\varphi'| << 1$ (kleine Verzerrung) $\Rightarrow k(x) \approx \varphi''(x)$

dann gilt für die Biegelinie $\varphi \in H$: $\|\varphi''\|_2 \leq \|v''\|_2 \quad \forall v \in H$

(Extremaleigenschaft kubischer Splines)