3.18 Extremaleigenschaft kubischer Splines

dim des Lösungsraumes

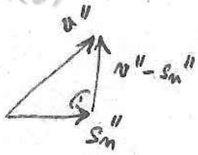
Lemma [Skript L 3.17]: Es sei $s_n \in S_\Delta^3$ die Lösung des Interp.-problems 3.16, und $v \in C_\Delta^2[a,b]$. Gilt die Randbedingung

$S_n(x_k) = f(x_k) \ \forall k = 0, \dots, n$

$$s_n''(x)\left(v'(x) - s_n'(x)\right)\Big|_a^b = 0, \qquad \text{(RB)}$$

so folgt $\|s_n''\|_2 \leq \|v''\|_2$. also: kubische Splines minimieren die Biegespannung (unter Annahme gewisser RB)

Idee:



Beweis: Wir zeigen L^2-Orthogonalität: $(s_n'', v'' - s_n'') = 0$

Aus Pythagoras: würde dann folgen

$$\|v''\|_2^2 = \|s_n''\|_2^2 + \|s_n'' - v''\|_2^2 \geq \|s_n''\|_2^2$$

35

Num.:

$$(s_m'', v''-s_m'') = \int_a^b s_m''(x)\left(v''(x)-s_m''(x)\right)dx$$

integriere über Teilintervalle

$$= \sum_{\ell=1}^{m} \int_{x_{\ell-1}}^{x_\ell} s_m''(x)\left(v''(x)-s_m''(x)\right)dx$$

$\int uv'dx = uv - \int u'v\,dx$

partielle Integration

$$\overset{PI}{=} \sum_{\ell=1}^{m}\left[s_m''(v'-s_m')\Big|_{x_{\ell-1}}^{x_\ell} - \int_{x_{\ell-1}}^{x_\ell} \underbrace{s_m'''}_{\|}(v'-s_m')\,dx\right]$$

$d_\ell = \text{const}$, da $s_m|_{I_\ell} = p_\ell \in \mathcal{P}_3$

$$= s_m''(v'-s_m')\Big|_a^b - \sum_{\ell=1}^{m} d_\ell \underbrace{(v-s_m)\Big|_{x_{\ell-1}}^{x_\ell}}_{=0 \text{ wg Interpol. bed.}}$$

$$\overset{(RB)}{=} 0$$

∎

3.19 Typen kubischer Splines

Satz [Skript S3.17] Zusätzlich zur Interpolationsaufg. 3.16 erfülle $s_m \in S_\Delta^3$ eine der Bedingungen:

A. $s_m'(a) = f'(a)$, $s_m'(b) = f'(b)$ — vollständige RB

B. $s_m''(a) = s_m''(b) = 0$ — natürliche RB (Balken an Enden nicht eingespannt)

C. $s_m'(a) = s_m'(b)$, $s_m''(a) = s_m''(b)$. — periodische RB

Dann ist s_m eindeutig bestimmt. Ferner, für alle $v \in H$ die die gleiche Bedingung A, B, oder C erfüllt, gilt

$$\|s_m''\|_2 \le \|v''\|_2 \qquad \forall\, v \in H^* = \{v \in C^2_\Delta[a,b] \mid v \text{ erfüllt die RB}\}$$

Beweis: Man sieht schnell ein, dass die Interpolations~~bzw. Verheftungs~~bedingungen + die RBen (A, B, oder C) $m+3$ lin. unabhängige Bedingungen sind. (*) Es ist $\dim S_\Delta^3 = m+3$, und da die Bedingungen linear sind, ist die Interpolationsaufgabe (mit RB A, B, oder C) äquivalent zu einem nichtsingulären lin. Gleichungssystem ⟹ Existenz & Eindeutigkeit.

(*): z.B. Konstruiere $v \in S_\Delta^3$ so daß alle Bedingungen $= 0$ bis auf einen ⟹ lin. unabh.

Fazit: zu jeder Fkt $f \in C^2([a,b])$ $\exists!\ s_m = \Phi_m(f) \in S_\Delta^3$ mit $s_m(x_\ell) = f(x_\ell)$, $\ell = 0, \dots, m$ und RB A, B o. C

Spline-Interpolationsop. $C^2([a,b]) \ni f \to \Phi_m(f) \in S_\Delta^3$

$\Phi_m : C^2([a,b]) \longrightarrow S_\Delta^3$

Extremaleigenschaft:

~~Da aus A, B, C ⟹ (RB) aus 3.18, mit dem Lemma haben wir die Extremaleigenschaft.~~

$s_m \in S_\Delta^3 \subset C^2([a,b])$, außerdem erfüllt s_m die RB und IB ⟹ $s_m \in H^*$

z.z.: $s_m''(x)\left(v'(x) - s_m'(x)\right)\Big|_a^b = 0$

$$s_m''(b)\left(v'(b) - s_m'(b)\right) - s_m''(a)\left(v'(a) - s_m'(a)\right) \overset{RB}{=} 0$$

$f'(a)$

$\overset{(3.17)}{\Longrightarrow}$ $\|s_m''\|_2 \le \|v''\|_2$

3.20 Berechnung der vollständigen kubischen Spline-Interpolation

$s_m|_{I_k} \in P_3$, mache Taylor-Ansatz für die Polynome auf den einzelnen Intervallen

$$s_m(x) = a_k + b_k(x-x_k) + \frac{c_k}{2!}(x-x_k)^2 + \frac{d_k}{3!}(x-x_k)^3 \quad \text{für } x \in I_{k+1},\ k=0,\dots,m-1$$

Polynom 3. Grades

Satz [Skript S3.19] Die zweiten Ableitungen $s_m''(x_k)$ seien bekannt (*)

Es gilt, wenn man $c_m := s_m''(x_m)$ setzt, dass

$$a_k = f(x_k) \qquad k = 0,1,\dots,m-1$$

$$c_k = s_m''(x_k) \qquad k = 0,1,\dots,m$$

$$d_k = \frac{c_{k+1}-c_k}{h_{k+1}} \qquad k = 0,\dots,m-1,$$

und ~~die Rekursion~~ Rekursion erhält man

$$b_0 = f'(a), \quad b_{k+1} = b_k + \frac{1}{2}(c_{k+1}+c_k)\,h_{k+1} \qquad k = 0,1,\dots,m-2$$

$s_m(x_k) = a_k = f(x_k)$, $k=0,\dots,m-1$

$s_m'(x) = b_k + c_k(x-x_k) + \frac{d_k}{2}(x-x_k)^2$

$s_m''(x) = c_k + d_k(x-x_k)$

$\Rightarrow s_m''(x_k) = c_k$

Beweis: a_k, c_k folgen aus der Interpolationsbedingung und direktes Einsetzen.

$s_m \in C^2$, also $s_m'' \in C^0$, aus der Stetigkeit von s_m'' in x_{k+1} folgt

$$c_k + d_k h_{k+1} = s_m''|_{I_{k+1}}(x_{k+1}) = s_m''|_{I_{k+2}}(x_{k+1}) = c_{k+1} \qquad k = 0,\dots,m-2$$

$= c_{k+1} + d_{k+1}(x_{k+1}-x_{k+1})$

und für $k = m-1$ wegen Annahme $c_m = s_m''(x_m)$.

$d_k = \frac{c_{k+1}-c_k}{h_{k+1}}$, $k=0,\dots,m-1$

$k = m-1$: $c_m \overset{(*)}{=} s_m''|_{I_m}(x_m) = c_{m-1} + d_{m-1}h_m$

Stetigkeit von s_m' in x_{k+1} ergibt

$s_m'|_{I_{k+2}}(x_{k+1}) = b_{k+1} + c_{k+1}(x-x_{k+1}) + \frac{d_{k+1}}{2}(x-x_{k+1})^2$

$$s_m'|_{I_{k+1}}(x_{k+1}) = b_k + c_k h_{k+1} + \frac{1}{2}d_k h_{k+1}^2 = b_{k+1} \qquad k = 0,1,\dots,m-2$$

Einsetzen von $d_k = \frac{c_{k+1}-c_k}{h_{k+1}}$ ergibt die Rekursion mit $b_0 = s_m'(a) = f'(a)$. ▨

$s_m'(x)|_{I_1} = b_0 + c_0(x-x_0) + \frac{d_0}{2}(x-x_0)^2$

$f'(a) \overset{RB}{=} s_m'(x_0)|_{I_1} = b_0$

Nächster Schritt: berechne $s_m''(x_k)$

- Idee: finde $s_m''(x_k)$ durch Projektion.

Definiere $P: C[a,b] \to S_\Delta^1$ durch: (lineare Abb.)

linearer Spline-Interpolator

zu geg. $g \in C[a,b]$ wähle $w \in C^2[a,b]$ mit $w'' = g$. Setze $Pg = (\phi_m w)''$

kubischer Interpolationsoperator.

Ist P eindeutig? Seien $w_1, w_2 \in C^2[a,b]$ mit $w_1'' = w_2'' = g$.

Dann ist $w_1 - w_2$ linear (da $(w_1-w_2)'' \equiv 0$), und

$$Pw_1'' - Pw_2'' = P(w_1'' - w_2'') = (\underbrace{\phi_m(w_1-w_2)}_{=w_1-w_2})'' = (w_1-w_2)'' = 0 \quad \checkmark$$

P linear, Def. P, $(\in P_1)$ also Pg unabhängig von der Wahl von w

$P_1 \subset P_2 \subset P_3$, Interpolierende eines Polynoms ist das Polynom selbst

Nun, für $f \in C^2[a,b]$:

$$P(f'') = (\phi_m f)'' = s_m'', \quad \text{genau, was wir suchen}$$

Um $s_m''(x_k)$ zu erhalten, müssen wir P auswerten

- <u>P ist Projektion</u>:

$$P^2 g = P(Pg) \underset{w''=g}{=} P((\phi_m w)'') = (\phi_m(\phi_m w))'' \underset{\phi_m \text{ Proj}}{=} (\phi_m w)'' = Pg$$

- <u>P ist Orthogonalprojektion</u>:

$\|P\|_2 \geq 1$, da P Projektion. Aber auch

$$\|Pg\|_2 = \|(\phi_m w)''\|_2 \underset{\uparrow}{\leq} \|w''\|_2 = \|g\|_2 \qquad \forall g \in C[a,b]$$

$\max_{g \in C[a,b]} \frac{\|Pg\|_2}{\|g\|_2} = 1$ $\quad$ Extremaleigenschaft 3.18

$\Longrightarrow \|P\|_2 \leq 1$ (da $C[a,b]$ dicht im $L^2[a,b]$), also $\|P\|_2 = 1$

- <u>Zugehörige Bestapproximationsaufgabe</u>

Nach 2.9 [Skript S2.8] ist $u = Pg$ Lösung der Bestapprox.-Aufg.:

$$u \in S^1_\Delta: \quad \|u-g\|_2 \leq \|v-g\|_2 \quad \forall v \in S^1_\Delta$$

da P Projektion auf S_Δ

Lösung durch <u>Normalengleichung</u>. Da $c_k = s_m''(x_k)$, bietet sich die Knotenbasis $\{\varphi_k\}_k$ von S^1_Δ an (Erinnerung: lineare finite Elemente )

~~Ansatz~~ $$P(f'') = s_m'' = \sum_{k=0}^{m} c_k \varphi_k$$

Normalengleichung:

$$\boxed{Mc = \beta}$$

mit

$$M = \begin{pmatrix} 2 & \lambda_0 & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & \\ & \ddots & \ddots & \lambda_{m-1} \\ & & \mu_m & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad \mu_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}, \quad \lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} = 1 - \mu_i$$

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad \beta_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}} (f'', \varphi_i)$$

β hängt nur von Knotenwerten ab:

$$(f'', \varphi_i) = \ldots = f[x_i, x_{i+1}] - f[x_i, x_{i-1}] = (h_i + h_{i+1}) f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]$$

(Am Rand setze $x_{-1} = x_0$, und $x_{m+1} = x_m$, also konfluent)

$$\Longrightarrow \beta_i = 6 f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}] \qquad i = 0, \ldots, m$$

Löse $Mc = \beta$ mit <u>Thomas-Algorithmus</u> (LR für tridiagonale, diagonaldominante System: Aufwand: $O(m)$)

Wir haben gesehen, 2.14 [Skript S2.13], daß $K_\infty(M) \leq 3$.