Bem: Bei der Rekursion

$$b_{k+1} = b_k + \frac{1}{2}(c_{k+1} + c_k)\, h_{k+1}$$

können sich Rundungsfehler aufschaukeln. Abhilfe [Skript S3.20]:
Man kann zeigen, dass

$$b_k = f[x_k, x_{k+1}] - h_{k+1}\frac{2c_k + c_{k+1}}{6} \qquad k = 0, \dots, n-1$$

$$s_n(x)\big|_{J_{k+1}} = a_k + b_k(x-x_k) + \frac{c_k}{2!}(x-x_k)^2 + \frac{d_k}{3!}(x-x_k)^3$$

kub. Spline Interpolationsop.

Wiederholung:
zu jeder Fkt. $f \in C^2[a,b]$ $\exists!$ $s_n = \Phi_n(f) \in S_\Delta^3$ welcher die Interpolationsbed. ($s_n(x_k) = f(x_k)$, $k = 0, \dots, n$) und RB Typ A, B oder C erfüllt sowie die Extremaleigenschaft $\|s_n''\|_2 \le \|v''\|_2 \;\forall v \in H$

3.21 Stabilität kubischer Splines

Lemma [Skript L3.21]

a) Für $f \in C^2[a,b]$:

$$\|P(f'')\|_2 = \|s_n''\|_\infty = \|Pf''\|_\infty \le \|P\|_\infty \|f\|_\infty$$

$$\|s_n''\|_\infty \le 3\|f''\|_\infty \quad \text{, oder, äquivalenterweise} \quad \|P\|_\infty = \sup_{g \ne 0} \frac{\|Pg\|_\infty}{\|g\|_\infty} \le 3$$

4

b) Falls $f \in C^4[a,b]$, dann gilt auch:

$$\|s_n'' - f''\|_\infty \le h^2 \frac{\|f^{(IV)}\|_\infty}{2}$$

(wie 3.21 mit $g = f''$)

Beweis: a) s_n stückweise $\mathcal{P}_3 \Rightarrow s_n'' \in S_\Delta^1$, stückw. linear

Daher $\|s_n''\|_\infty = \|c\|_\infty$, wo c wie vorher, Lösung von $M c = \beta$

Also: $\|f''\| = \|\sum c_k l_k\|_\infty$

$$\|s_n''\|_\infty = \|c\|_\infty = \|M^{-1}\beta\|_\infty \overset{S2.13}{\le} \|\beta\|_\infty \overset{3.20}{=} 6 \max_i |f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]|$$

$$\underset{S3.5}{\overset{3.6}{\le}} 6\,\frac{\|f''\|_\infty}{2} = 3\|f''\|_\infty$$

Da f'' beliebig, $s_n'' = Pf''$, wir haben $\|P\|_\infty \le 3$.

b) Sei $u_n(x) = \sum_k f''(x_k)\varphi_k(x)$, stw. lin. interpolation φ_k: Hutchenfkt.

Dann $Pu_n = u_n$, und da $u_n \in S_\Delta^1$

$$\|s_n'' - f''\|_\infty \le \|s_n'' - u_n\|_\infty + \|u_n - f''\|_\infty = \|P(f'') - Pu_n\|_\infty + \|u_n - f''\|_\infty$$

$$\le (\|P\|_\infty + 1)\,\|u_n - f''\|_\infty$$

$$\overset{a)}{\le} 4\|f'' - u_n\|_\infty \underset{S3.15}{\overset{3.15}{\le}} \frac{\|f^{(IV)}\|_\infty}{2} h^2$$

3.22 Fehlerabschätzung vollständiger kubischer Splineinterpolation

Satz [Skript S3.22]: Sei $f \in C^4[a,b]$. Dann gilt

$$\|f - \Phi_n f\|_\infty \le \frac{h^4}{16}\|f^{(IV)}\|_\infty$$

Beweis: Sei $e_n = f - \Phi_n f$. Interpoliere e_n auf Stützstellen x_k, x, x_{k+1}:

$$p_2(z) = e_n[x_k] + e_n[x_k, x_{k+1}](z - x_k) + e_n[x_k, x_{k+1}, x](z - x_k)(z - x_{k+1})$$

$= 0$ (Interpol. Bed.)

Da $e_m(x_\ell) = 0 = e_m(x_{\ell+1})$ (Interpolationsbedingung!), muss $p_2 = \text{const}\,(x-x_\ell)(x-x_{\ell+1})$ sein, also (mit $z=x$)

$$\underline{e_m(x)} \underset{\text{JP-Bed.}}{=} p_2(\underline{x}) = e_m[x_\ell, x_{\ell+1}, x]\,(\underline{x}-x_{\ell+1})(\underline{x}-x_\ell)$$

Also:

$$\|e_m\|_\infty \le \|e_m[x_\ell, x_{\ell+1}, \cdot]\|_\infty \max_{x\in I_{\ell+1}} |(x-x_\ell)(x-x_{\ell+1})|$$

$$\underset{(3.6.)}{\le} \frac{\|e''\|_\infty}{2}\cdot\frac{h^2}{4} \overset{3.21}{\underset{L3.21}{\le}} \frac{h^2\|f^{(IV)}\|_\infty}{4}\cdot\frac{h^2}{4} \qquad \blacksquare$$

$e_m = f - I_m f = f - s_m$, $e_m'' = f'' - s_m''$

<u>Bemerkungen</u>:

- Hall (1968): $\|f-s_m\|_\infty \le \frac{5}{384}h^4\|f^{(IV)}\|_\infty$, wo $\frac{5}{384}$ ist bestmögliche Konstante
  schärfere Abschätzung
- Periodische Spline-Interpol.: $\|f-s_m\|_\infty \le \frac{h^4}{16}\|f^{(IV)}\|_\infty$
- Natürliche —"— : $\|f-s_m\|_\infty = O(h^2)$ weil Ableitungsinfo am Rand nicht berücksichtigt.

IV. NUMERISCHE QUADRATUR

4.1 Aufgabenstellung

- Gegeben $f \in C[a,b]$
- Berechne $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$

4.2 Ein unbrauchbarer Algorithmus

Stammfunktion

$$F(x) = \int_a^x f(s)\,ds\,, \quad \text{dann} \quad I(f) = F(b) - F(a)$$

- Berechnung über Stammfkt von Auslöschung behaftet
- Stammfkt zu ermitteln meist teuer, wenn überhaupt möglich (oft existiert keine geschlossene Form)

4.3 Konditionsanalyse

- Absolute Kondition:

$$\sup_{f \in C[a,b]} \frac{|I(f)|}{\|f\|_\infty} \leq b-a$$

$$|I(f) - I(f+\Delta f)| = |I(\Delta f)| \leq \int_a^b |\Delta f| = \|\Delta f\|_1$$

absolute Kondition ist harmlos

- Relative Kondition:

Beachte, $I: C[a,b] \to \mathbb{R}$ linear

$$\frac{|I(f) - I(f+\Delta f)|}{|I(f)|} = \frac{|I(\Delta f)|}{|I(f)|} \leq \frac{(b-a)\|\Delta f\|_\infty}{|I(f)|} = \underbrace{\frac{(b-a)\|f\|_\infty}{|I(f)|}}_{=K_{rel}} \cdot \frac{\|\Delta f\|_\infty}{\|f\|_\infty}$$

kann groß werden, insbesondere für hoch-oszillatorische Integranden

Bsp: $f_n(x) = \frac{(2n+1)\pi}{2} \cdot \sin((2n+1)\pi x)$

$I(f_n) = \int_0^1 f_n(x)\,dx = 1$, $\|f_n\|_\infty = \frac{(2n+1)\pi}{2}$

$K(I(f_n)) = \frac{(2n+1)\pi}{2} \xrightarrow{n \to \infty} \infty$

4.4 Anforderungen an die Numerik

Wir wollen Quadraturformeln $I_N(f) \approx I(f)$ konstruieren

- I_N soll linear sein
- Aufwand $I_N(f)$ = N . f-Auswertungen
- $\lim_{N \to \infty} I_N(f) = I(f)$ soll gelten
- QF ist vom q-ter Ordnung, falls

$$|I(f) - I_N(f)| = O(N^{-q})$$

Konstante hängt von f ab!
Damit auch die Effizienz!

4.5 Interpolatorische Quadraturformeln

- Gitter $\Delta = \{ a = z_0 < z_1 < \dots < z_{m-1} < z_m = b \}$, $V_\ell = [z_{k-1}, z_k]$
- Zerlege Integral

$$I(f) = \sum_{\ell=1}^{m} \int_{V_\ell} f(x)\,dx$$

- Interpolation auf Teilintervallen: $p_{n\ell} \in \mathbb{P}_n$ auf V_ℓ

$$p_{n\ell}(x_{i\ell}) = f(x_{i\ell}) \quad \forall i = 0, \dots, n$$

Stützstellen $\quad z_{\ell-1} \leq x_{0\ell} < x_{1\ell} < \dots < x_{n\ell} \leq z_\ell$

- Approximation:

$$\int_{V_\ell} f = \int_{V_\ell} p_{n\ell} = h_\ell \sum_{i=0}^{n} \overset{p_{n\ell}(x_{i\ell})}{\overset{\parallel}{f(x_{i\ell})}} \lambda_{i\ell}, \quad h_\ell = z_\ell - z_{\ell-1}$$

Gewichte:

$$\lambda_{i\ell} = \frac{1}{h_\ell} \int_{V_\ell} L_{i\ell}(x)\,dx, \quad L_{i\ell}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_{j\ell}}{x_{i\ell} - x_{j\ell}}$$

- Summierte Quadraturformel

$$I_\Delta(f) = \sum_{\ell=1}^{m} h_\ell \sum_{i=0}^{n} \lambda_{i\ell} f(x_{i\ell}) \qquad \text{Aufwand: } m \underbrace{(n+1)}_{\text{Interp. / Teilintervall}}$$

4.6 Diskrete Kondition

I_Δ offensichtlich linear.

$$|I_\Delta f| \leq \sum_{\ell=1}^{m} h_\ell \sum_{i=0}^{n} |\lambda_{i\ell}| \underbrace{|f(x_{i\ell})|}_{\leq \|f\|_\infty} \leq \gamma(b-a) \|f\|_\infty$$

absolute Kondition

$$\gamma = \max_{\ell=1,\dots,m} \sum_{i=0}^{n} |\lambda_{i\ell}|$$

Satz [Skript S4.2]

Für $f \in C[a,b]$ mit $I_\Delta(f) \neq 0$ gilt

$$\kappa_{rel} = \gamma(b-a) \frac{\|f\|_\infty}{|I_\Delta(f)|}$$

Ist I_Δ vom positivem Typ, d.h. $\lambda_{i\ell} \geq 0 \ \forall i, \ell$, so gilt $\gamma = 1$, sonst $\gamma \geq 1$.

Beweis: κ_{rel} wie oben. Sei $\ell = 1, \dots, m$ beliebig und $p_0 \equiv 1$. Dann

$$h_\ell = \int_{V_\ell} p_0 = h_\ell \sum_{i=0}^{n} 1 \cdot \lambda_{i\ell} \implies \sum_i \lambda_{i\ell} = 1 \quad \forall \ell$$

$\implies \gamma = 1$ falls $|\lambda_{i\ell}| = \lambda_{i\ell}$. Sonst $\gamma \geq 1$ aus Δ-Ungleichung. ∎