Falls $\mathcal{J} \neq 1$: Keine zusätzliche Fehlerverstärkung im Vergleich zum analytischen Problem $\Rightarrow$ Stabilität

$\rightarrow$ wir sind an positiven QFen interessiert

4.7 Newton-Côtes-Formeln

= interpolatorische QF zu äquidistantem Gitter $h = \frac{b-a}{m}$

Notation: Bei äquidist. Gitter Δ mit Gitterweite h schreiben wir $I_h = I_\Delta$

I_h ist von Ordnung q :$\Leftrightarrow$ $|I(f) - I_h(f)| = \mathcal{O}(h^q)$

Summierte Newton-Côtes-Formeln: (CoMa)

$$x_{i\ell} = z_{\ell-1} + i\frac{h_\ell}{m}, \quad i = 0, \dots, m$$

Fehler	Stufenzahl (# Auswertungen $= m+1$)	Ordnung q	Gewichte λ_i	Name
$h^2 \|f^{(2)}\|_\infty$	2	2	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	sum. Trapezregel
$h^4 \|f^{(4)}\|_\infty$	3	4	$\frac{1}{6}$ $\frac{4}{6}$ $\frac{1}{6}$	sum. Simpsonregel (Keplersche Faßregel)
$h^4 \|f^{(4)}\|_\infty$	4	4	$\frac{1}{8}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{1}{8}$	sum. (Newtonsche) $\frac{3}{8}$-Regel

Beobachtungen:

- Positive Gewichte nur für $m = 1, \dots, 7$, und 9
- Diskrete Kond $\rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ $\Rightarrow$ hohe Ordnungen instabil (vgl. äquidist. Interp.)

Nächstes Ziel: QFen vom positiven Typ beliebig hoher Ordnung (möglichst effizient: max. Ordnung pro f-Auswertung) (für f mit hoher Regularität)

Wiederholung: Numerische Quadratur: berechne $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$

Kondition: $\kappa_{abs} = 1$, $\kappa_{rel} = \frac{(b-a)\|f\|_\infty}{|I(f)|}$

Quadraturformel: $I_N(f) \approx I(f)$

Interpolatorische Quadratur: $I_\Delta(f) = \sum_{\ell=1}^{m} h_\ell \sum_{i=0}^{n} \lambda_{i\ell} f(x_{i\ell})$

diskrete Kond: $\kappa_{abs}^\Delta = \mathcal{J}(b-a)$, $\kappa_{rel}^\Delta = \mathcal{J}(b-a)\frac{\|f\|_\infty}{|I_\Delta(f)|}$ $\lambda_{i\ell} = \frac{1}{h_\ell}\int L_{i\ell}(x)\,dx$

$\mathcal{J} = \max_\ell \sum |\lambda_{i\ell}| \geq 1$

falls f keine glatte Fkt. $\Rightarrow$ passe Lage der Gitterpunkte zu
automatisch lokal an f an
$\downarrow$
adaptive Multilevel-Verfahren

IV.1 GAUß-CHRISTOFFEL-QUADRATUR

4.8 Superkonvergenz

Beobachtung: Simpson-Regel: $q = 4 > 3 = n+1$ (liefert Theorie: Fehlerabschätzung der Interpolation)

Frage: Wie groß kann q werden bei gegebenem n? n .. Polynomgrad auf den Teilintervallen

Variablen zu bestimmen:

$x_0, \dots, x_n$, $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ — # $2(n+1)$

Bestimmungsgleichungen nichtlinear

(Fehler hängt vom $\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$ ab)

} Vermutung $q = 2(n+1)$ möglich, evtl. eindeutige Lösung

4.9 Charakterisierung von Superkonvergenz

Lemma [Skript L4.3]: Geg. $\alpha < \beta$, Stützstellen

$$\alpha \le x_0 < \dots < x_n \le \beta,$$

so, dass mit den Gewichten

$$\mu_k = \frac{1}{\beta - \alpha}\int_\alpha^\beta L_k(x)\,dx, \quad L_k(x) = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{(x - x_i)}{x_k - x_i} \qquad k = 0, \dots, n$$

die Bedingung

$$\int_\alpha^\beta p(x)\,dx = (\beta - \alpha)\sum_{i=0}^{n} \mu_i\, p(x_i) \qquad \forall\, p \in \mathbb{P}_{2n+1} \qquad \text{(PE)}$$

$\uparrow$ Polynome Exakt integriert

erfüllt ist. Dann ist die QF

$$I_h(f) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{n} \mu_i\, f(x_{ik})\, h$$

mit

$$x_{ik} = z_{k-1} + \frac{h}{\beta - \alpha}(x_i - \alpha) \quad , \; i = 0, \dots, n, \; k = 1, \dots, m \qquad (*)$$

für alle $f \in C^{2(n+1)}[\alpha, \beta]$ von der Ordnung $2(n+1)$.

Beweis: Schritt 1: Transformation vom (PE) auf beliebige Intervalle.

$p \in \mathbb{P}_{2n+1}$.

Auswertungen in $x = x_i$ = Ausw. von p in x_{ik}

$$\int_{V_k} p(x)\,dx = \int_{z_{k-1}}^{z_k} p(x)\,dx = \frac{h}{\beta - \alpha}\int_\alpha^\beta p\left(z_{k-1} + \frac{h}{\beta - \alpha}(x - \alpha)\right)dx \overset{\text{(PE) mit } (*)}{=} \sum_{i=0}^{n} \mu_i\, p(x_{ik})\, h$$

Polynome vom Grad $2n+1$ werden also überall exakt integriert

Schritt 2: Approx. von f durch $p \in \mathcal{P}_{2m+1}$.

Interpoliere $f|_{V_q}$ in den Stützstellen x_{iq}, $i = 0, \dots, m$ $\quad (p(x_{iq}) = f(x_{iq}),\ i = 0, \dots, m)$

und mit $m+1$ Ableitungs-bedingungen $p^{(j)}(x_{0q}) = f^{(j)}(x_{0q})$, $j = 1, \dots, m+1$

(Hermitesche Interpolationsaufgabe) $\quad$ insges. $2(m+1)$ Bedingungen

$k_0 = m+1$ (höchste Ableitung)

Nach Satz 3.7 [Skript F3.6]:

$$\|f - p\|_{\infty, V_q} \le \frac{1}{[2(m+1)]!} \|f^{(2m+2)}\|_{\infty, V_q} h^{2m+2}$$

$$3.7.\quad f(x) - P_{2m+1}(x) = \frac{f^{(2m+2)}(\xi)}{(2m+2)!} (x - x_{0q})^{m+1} \prod_{i=1}^{m} (x - x_{iq}) \le h^{2m+2}$$

Mit $\left|\int_{V_q} w \, dx\right| \le h \|w\|_\infty$ erhalte

$$\Big| \int_{V_q} f(x)dx - \sum_{i=0}^{m} \mu_i \underbrace{p(x_{iq})}_{= f(x_{iq})} h \Big| = \Big| \int_{V_q} (f-p)(x)dx \Big| \le \frac{h}{[2(m+1)!]} \|f^{(2m+2)}\|_{\infty, V_q} h^{2m+2}$$

Schritt 1 span $= \Sigma$

Summiere über q, verliere ein h-Potenz, und erhalte Resultat. ∎

$$|J(f) - J_h(f)| \le \sum_q \Big| \int_{V_q} (f-p)(x)dx \Big| \le \frac{(b-a)}{(2m+2)!} \|f^{(2m+2)}\|_\infty h^{2m+2}$$

4.10 Die Stützstellen als Nullstellen

Suchen Stützstellen mit Eigenschaft (PE)

Lemma [Skript L4.4]: Genügen die Stützstellen $\alpha \le x_0 < \dots < x_m = \beta$ der Exaktheits-Bedingung (PE), so ist $p_{m+1} \in \mathcal{P}_{m+1}$

$$p_m(x) = (x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_m)$$

orthogonal zu $\mathcal{P}_m$ bzgl des L^2-Skalarprodukts, d.h.

$$(p_{m+1}, q) = 0 \quad \forall q \in \mathcal{P}_m \qquad \text{(OE)}$$

Beweis: Sei $q \in \mathcal{P}_m$, dann $p_{m+1} \cdot q \in \mathcal{P}_{2m+1}$, und aus (PE) folgt

$$(p_{m+1}, q) = \int_\alpha^\beta q \cdot p_{m+1}\, dx = (\beta - \alpha) \sum_{q=0}^{m} \mu_q \underbrace{p_{m+1}(x_q)}_{=0} q(x_q) = 0$$ ∎

4.11 Die Nullstellen sind alle verschieden

Dimensionsargument: $\dim \mathcal{P}_m^\perp \cap \mathcal{P}_{m+1} = 1$ (da $\mathcal{P}_m \subseteq \mathcal{P}_{m+1}$), und damit ist $p_{m+1} \in \mathcal{P}_{m+1}$ mit $p_{m+1} \perp \mathcal{P}_m$ eindeutig, bis auf Skalierung

$\rightsquigarrow$ Nullstellen eindeutig! Aber wie viele?

Lemma [Skript L4.5]: Ein $p_{m+1} \in \mathcal{P}_{m+1}$ mit der Eigenschaft (OE) hat $m+1$ verschiedene Nullstellen in $[\alpha, \beta]$.

Beweis: Nehme an, p_{m+1} hat nur $m_0 < m+1$ verschiedene Nullstellen in $[\alpha, \beta]$. $\leftarrow x_0, \dots, x_{m_0}$

Falls $m_0 = 0$, sei $q \equiv 1$, sonst

$$q(x) = (x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_{m_0})$$

also $(p_{m+1}, q) \neq 0$ ↯

(haben q so definiert)

Da p_{n+1} und q dieselben Nullstellen haben, wechselt $q \cdot p_{n+1}$ nicht das Vorzeichen in $[\alpha, \beta]$. O.E. sei $q \cdot p_{n+1} \geq 0$. $q \cdot p_{n+1} \not\equiv 0$, da beide
oBdA $\qquad \forall x \in [\alpha, \beta]$
Nichtnull-Polynome sind. Also:

$$\int_\alpha^\beta q \cdot p_{n+1} > 0 \quad \text{, im Widerspruch zu Orthogonalität (OF)} \qquad \blacksquare$$

$$0 < \int_\alpha L_{\xi_0} = (\beta - \alpha) \sum_{\xi=0} \mu_\xi \ldots \qquad \geq 0$$

$L_{\xi_0}(x_\xi) = \delta_{\xi_0 \xi}$