(haben q so definiert)

Da p_{m+1} und q dieselben Nullstellen haben, wechselt $q \cdot p_{m+1}$ nicht das Vorzeichen in $[\alpha, \beta]$. O.E. (o.B.d.A.) sei $q \cdot p_{m+1} \geq 0$ ($\forall x \in (\alpha,\beta]$). $q \cdot p_{m+1} \not\equiv 0$, da beide Nichtnull-Polynome sind. Also:

$$\int_\alpha^\beta q \cdot p_{m+1} > 0, \quad \text{im Widerspruch zu Orthogonalität (OE)} \quad \blacksquare$$

Wiederholung: $x_{i,q} = z_{q-1} + i \cdot \frac{h}{m}$ · Newton Cotes

$m=1$: summierte Trapezregel ($q=2$)

$m=2$: Simpsonregel ($q=4$)

$|J(f) - J_h(f)| = O(h^q)$, $q \leq 2(m+1)$

Ziel: $q = 2(m+1)$ wird erreicht, wenn $x_{0q}, \dots, x_{mq}$ (PE) erfüllen, dann ist $p_{m+1}(x) = (x - x_{0q}) \cdots (x - x_{mq}) \perp P_m$

4.12 Gauß'sche Quadraturformeln

Satz [Skript §4.6]: Seien $\alpha \leq x_0 < \dots < x_m \leq \beta$ die (nach 4.11) unterschiedlichen Nullstellen eines Polynoms $p_{m+1} \in P_{m+1}$ mit (OE). Die Gewichte μ_ℓ seien wie in 4.9 berechnet. Dann erfüllt die resultierende QF die Exaktheitsbed. (PE).

Beweis: Die QF ist interpolatorisch auf $m+1$ verschiedenen Stützstellen $\Rightarrow$ $p \in P_m$ wird exakt integriert!

(Sei $p \in P_m \Rightarrow p(x) = \sum_{\ell=0}^m p(x_\ell) L_\ell(x)$; $\int_\alpha^\beta p(x)\,dx = \sum_{\ell=0}^m p(x_\ell) \underbrace{\int_\alpha^\beta L_\ell(x)\,dx}_{=(\beta-\alpha)\mu_\ell}$)

Sei $p \in P_{2m+1}$. Polynomdivision mit $p_{m+1} = (x-x_0)\cdots(x-x_m)$:

$$p = p_{m+1} q + r, \quad \text{mit } q, r \in P_m$$

Damit: ($\int_\alpha^\beta \sum_{\ell=0}^m r(x_\ell) L_\ell(x) = \sum_{\ell=0}^m r(x_\ell) \cdot \underbrace{\int L_\ell(x)\,dx}_{=(\beta-\alpha)\mu_\ell}$)

$$\int_\alpha^\beta p(x)\,dx = \int_\alpha^\beta p_{m+1} \cdot q + \int_\alpha^\beta r \quad (r \in P_m \text{ wird exakt integriert})$$

$$= \underbrace{(p_{m+1}, q)}_{=0 \text{ (OE)}} + (\beta - \alpha) \sum_{\ell=0}^m \mu_\ell r(x_\ell)$$

$$= (\beta - \alpha) \sum_{\ell=0}^m \mu_\ell \Big(r(x_\ell) + \underbrace{p_{m+1}(x_\ell)}_{=0} q(x_\ell) \Big)$$

$$= (\beta - \alpha) \sum_{\ell=0}^m \mu_\ell p(x_\ell) \quad \text{also QF erfüllt (PE)} \quad \blacksquare$$

Bem:
- Diese Stützstellen heißen Gauß-Knoten, die QF Gauß'sche QF
- Die Legendre-Polynome $p_{m+1}(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{m+1} (x^2 - 1)^{m+1}$ erfüllen (OE), also wegen Eindeutigkeit sind ~~sie~~ ihre Nullstellen die Gauß-Knoten ($(P_i(x), P_j(x)) = \delta_{ij}$)

4.13 Gauß'sche QFen sind positiv

$L_{\ell_0} \in P_m$, Lagrange-Polynom ($\ell_0 = 0, \dots, m$). Dann $L_{\ell_0}^2 \in P_{2m} \subseteq P_{2m+1}$

$\Rightarrow$ $L_{\ell_0}^2$ wird exakt integriert, und

$$0 < \int_\alpha^\beta L_{\ell_0}^2 = (\beta - \alpha) \sum_{\ell=0}^m \mu_\ell L_{\ell_0}(x_\ell) = \underbrace{(\beta - \alpha)}_{>0} \mu_{\ell_0} \Rightarrow \mu_{\ell_0} > 0$$

$L_{\ell_0}(x_\ell) = \delta_{\ell_0 \ell}$

4.14 Gauß-Christoffel-Quadratur

berechne $\int_\alpha^\beta f(x) w(x)\,dx$

Gewichtsfunktion: $\omega(x) > 0$, integrierbar (d.h. $\int_\alpha^\beta \omega < \infty$)

Gewichtetes Skalarprodukt: $(f,g)_\omega = \int_\alpha^\beta f(x)\,g(x)\,\omega(x)\,dx$

Bisherige Konstruktion überträgt sich 1-zu-1:

- Betrachte Orthogonalpolynome $p_{m+1} \in \mathcal{P}_{m+1}$, welche (OE) bzgl. $(\cdot,\cdot)_\omega$ erfüllen
- Nullstellen von p_{m+1} ergeben Stützstellen
- Gewichte: $\mu_k = \frac{1}{\beta-\alpha} \int_\alpha^\beta L_k(x)\,\omega(x)\,dx$

Bsp: $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\rightsquigarrow$ Tschebyscheff-Polynome sind orthogonal
$(T_i(x), T_j(x))_w = \delta_{ij}$

$[\alpha,\beta] = [-1,1]$

NB: Zerlegung in Teilintegrale (vgl. summierte QF) nur möglich bei $\omega \equiv 1$. Sonst hat man mit wechselndem ω pro Teilintervall zu rechnen.

4.15 Gauß-Lobatto-Quadratur

Um bei summierten QFen f-Auswertungen zu sparen, kann man $x_0 = \alpha$, $x_m = \beta$ fordern. Was ist die max. Ordnung unter diesen Bed.?

Satz [Skript §4.8]: Sei $x_0 = \alpha$, $x_m = \beta$, $m \geq 2$. Die Stützstellen $x_1, \dots, x_{m-1}$ seien Nullstellen des Polynoms $p_{m-1} \in \mathcal{P}_{m-1}$ mit

$$(p_{m-1}, q)_\omega = 0 \quad \forall\, q \in \mathcal{P}_{m-2}$$
$$\omega(x) = (x-\alpha)(x-\beta),$$

und die Gewichte μ_k seien wie in 4.9 (also ohne ω!). Dann erfüllt die Quadratur die Exaktheitsbedingung

$$\int_\alpha^\beta p = (\beta-\alpha) \sum_{i=0}^{m} \mu_i\, p_i(x_i) \qquad \forall\, p \in \mathcal{P}_{2m-1}$$

Bem:
- Aufwand: pro Teilintervall 1 f-Auswertung weniger
- Ordnung: (2 weniger.)

Summierte QF ist von der Ordnung 2m

4.16 Berechnung von Orthogonalpolynome

Satz [Skript S2.11 / DH Satz 6.2]: Zu jedem beliebigem Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ auf $\mathcal{P}_n$ gibt es eindeutig bestimmte Orthogonalpolynome $\psi_i \in \mathcal{P}_i$, $i = 0, \dots, n$, mit führendem Koeffizienten eins. Sie genügen der 3-Term-Rekursion

$$\psi_i(x) = (x + \alpha_i)\psi_{i-1}(x) + \beta_i \psi_{i-2}(x) \qquad i = 1, 2, \dots$$

mit

$$\psi_{-1} \equiv 0, \; \psi_0 \equiv 1, \; \beta_1 = 0,$$

und Koeffizienten

$$\alpha_i = -\frac{(x\psi_{i-1}, \psi_{i-1})}{(\psi_{i-1}, \psi_{i-1})}, \qquad \beta_i = -\frac{(\psi_{i-1}, \psi_{i-1})}{(\psi_{i-2}, \psi_{i-2})}$$

Beweisidee: Gram-Schmidt, wo der k-te Vektor / Polynom $x \cdot \psi_{k-1}(x)$ ist. Die Aussage folgt mit Induktion.

damit Gauß-Christoffel-Quadratur für bel. $\omega(x)$ anwendbar

IV.2 KLASSISCHE ROMBERG-QUADRATUR

4.17 Extrapolation

$T: [0, h_0] \to \mathbb{R}$ gegeben an Stützstellen $0 < h_n < \dots < h_1 < h_0$, suche Wert $T(0)$.

$\rightarrow$ Extrapolation

berechne Interpolations-Polynom

$$p_n \in \mathcal{P}_n : p_n(h_i) = T(h_i) \quad \rightsquigarrow \quad T(0) \approx p_n(0)$$

4.18 Anwendung: Quadratur

Quadraturformel: I_h, so dass $\underbrace{I_h(f)}_{T(h)} \to I(f)$ für $h \to 0$

Suche $T(0) = I(f)$, hoffe, durch Extrapolation eine Fehlerreduktion zu erzielen. Offensichtlich ist Glattheit von T in einer Umgebung der 0 ein Vorteil

4.19 Fehler der Extrapolation

Satz: [Skript §4.9]: Die Abbildung besitze die <u>asymptotische Entwicklung</u>

$$T(h) = T(0) + \sum_{\ell=1}^{m+1} \tau_\ell h^\ell + r_{m+2}(h) h^{m+2}, \qquad h \in [0, h_0] \qquad \text{Taylor-Entw.}$$

mit $\|r_{m+2}\|_\infty \leq C$.

Dann gilt für die Extrapolation von oben, 4.17, die Fehlerabschätzung

$$|T(0) - p_m(0)| \leq |\tau_{m+1}| h_0 h_1 \cdots h_m + C \sum_{j=0}^{m} h_j^{m+2} |L_j(0)|.$$

$$L_j(h) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{m} \frac{h - h_i}{h_j - h_i}$$

Lagrange-Polynome

Beweis: Aus [DH, Lemma 9.23]:

da $\sum_{j=0} L_j(0) = 1$

für $j = 0, \dots, m$:

$$(*) \quad \sum_{j=0}^{m} h_j^{\mathfrak{m}} L_j(0) = \begin{cases} 1 & \mathfrak{m} = 0 \\ 0 & \mathfrak{m} = 1, \dots, m \\ (-1)^m h_0 \cdots h_m & \mathfrak{m} = m+1 \end{cases}$$

Folgt direkt aus Exaktheit der Interpol. für $\mathbb{P}_m$

$Q(t) = t^{m+1} - \sum_j h_j^{m+1} L_j(t)$ hat führende Koeff 1, und die Nullstellen $h_0, \dots, h_m$

$\Rightarrow Q(t) = (t - h_0) \cdots (t - h_m)$

$\Rightarrow Q(0) = (-h_0) \cdot \ldots \cdot (-h_m)$

Damit:

$$|T(0) - p_m(0)| = \Big| T(0) - \sum_{j=0}^{m} \underbrace{T(h_j)}_{=p_m(h_j)} L_j(0) \Big|$$

$$\overset{\text{asy. Entw.}}{=} \Big| \underbrace{T(0) - \sum_{j=0}^{m} T(0) L_j(0)}_{=T(0)} - \sum_{j=0}^{m} \sum_{\ell=1}^{m+1} \tau_\ell h_j^\ell L_j(0) - \sum_{j=0}^{m} h_j^{m+2} r_{m+2}(h_j) L_j(0) \Big|$$

$$\underset{\|r\| \leq C}{\overset{(*)}{\leq}} |\tau_{m+1}| h_0 \dots h_m + C \sum_{j=0}^{m} h_j^{m+2} |L_j(0)| \qquad \blacksquare$$

Bem: Solange die Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind, Hinzunahme von einer Stützstelle <u>erhöht die Ordnung</u> um eins. (Falls Restterm ignoriert)