4.20 Asymptotische Entwicklung in gerade Potenzen (zur Verbesserung der Extrapol.)

z.B. $T(h) = \frac{\sin h}{h}$

Falls $\tau_k = 0$ für k ungerade $\Rightarrow$ $T(h) = T(0) + \tau_2 h^2 + \tau_4 h^4 + \dots$

Setze $G(h^2) = T(h)$ $\quad \tilde{h} = h^2 \quad \Rightarrow$ $G(\tilde{h}) = T(0) + \tau_2 \tilde{h} + \tau_4 \tilde{h}^2 + \dots$

Extrapoliere G in den Knoten $\tilde{h}_i = h_i^2$, $i = 0, \dots, n$ $\curvearrowright$ $p_n \in \mathcal{P}_n : p_n(h_i^2) = T(h_i)$

$$\overset{4.19}{\Longrightarrow} \Big| \underset{T(0)}{\underset{\parallel}{G(0)}} - p_n(0) \Big| \leq \tau_{2n+2} \tilde{h}_0 \cdots \tilde{h}_n + O(\tilde{h}_0^{n+2}) = \underline{\underline{\tau_{2n+2} h_0^2 \cdots h_n^2 + O(h_0^{2n+2})}}$$

+2 Ordnung pro Schritt

man gewinnt 2 Ordnungen je Stützstelle

Ziel untersuchen $|p_m(0) - I(f)|$ in Abhängigkeit von f, Auswertungen

4.21 Euler-MacLaurin'sche Summenformel (Euler 1736 / MacLaurin 1742)

Frage: existiert eine asymptotische Entwicklung von T?

- Bernoulli-Polynome: $B_k \in \mathbb{P}_k$

$$B_0 \equiv 1, \quad B_k'(x) = k B_{k-1}(x), \quad \underbrace{\int_0^1 B_k(x)\,dx = 0}_{\text{Normierung}} \qquad k = 1, 2, \dots$$

$B_1(x) = x - \frac{1}{2}$, $B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$, …

- Bernoulli-Zahlen: $B_k = B_k(0)$, $k = 0, 1, \dots$

$$B_1 = -\frac{1}{2}, \quad \text{dann } B_{2k+1} = 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots \qquad B_2 = \frac{1}{6},\ B_4 = -\frac{1}{30}$$

$|B_{2k}| \sim (2k)!$ für $k \to \infty$

Bem: $\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k$, konvergente Potenzreihe für $|z| < 2\pi$

Satz [Skript 4.10]: Es sei $m, n \in \mathbb{N}$, $g \in C^{2n+2}[0, m]$. Dann $\exists\, \xi \in [0, m]$ mit

$$\sum_{k=0}^{m} g(k) = \int_0^m g(t)\,dt + \frac{1}{2}(g(0) + g(m)) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} g^{(2k-1)}\Big|_0^m$$

$$+ \frac{B_{2n+4}}{(2n+4)!}\, m\, g^{(2n+4)}(\xi) \qquad \text{(E-M) Euler-MacLaurin'sche Summenformel}$$

Beweis: [Stoer, Kap. 3]. Restglied: Poisson (1823)

4.22 Anwendung 1: Asympt. Entwicklung der Trapezregel

③ $$T(h) = h\left(\sum_{k=0}^{m} g(k) - \frac{1}{2}(g(0) + g(m))\right)$$

② Trapezregel, mit $g(t) = f(a + th)$
$\Rightarrow g^{(k)}(t) = h^k f^{(k)}(a + th)$

① $T(h) = h\left(\sum f(a + kh) - \frac{1}{2}\left(f(a) + f(\underbrace{a + m\cdot h}_{b})\right)\right)$

$$\overset{\text{E-M}}{=} h\int_0^m g(t)\,dt + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} h\, g^{(2k-1)}\Big|_0^m + \frac{B_{2n+4}}{(2n+4)!} \underbrace{mh}_{=b-a} g^{(2n+4)}(\xi)$$

$$= \underset{\substack{\| \\ T(0)}}{\int_a^b f(x)\,dx} + \sum_{k=1}^{n+1} \underbrace{\frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}\Big|_a^b}_{\tau_{2k}} h^{2k} + \overbrace{\underbrace{\frac{B_{2n+4}}{(2n+4)!}(b-a) f^{(2n+4)}(\xi)}_{=:c}}^{\tau_{n+2}(h)} h^{2n+4}$$

Damit gilt für die Extrapolation in den Stützstellen $h_0^2, h_1^2, \dots, h_n^2$:

Folgerung [Skript S4.12]:

$$|I(f) - p_n(0)| \le |\tau_{2n+2}|\, h_0^2 \cdots h_n^2 + c\, \|f^{(2n+4)}\|_\infty \sum_{j=0}^{n} h_j^{2n+4} L_j(0)$$

Bew: Folgt aus 4.19 (Skript S4.9)

4.23 Anwendung 2: Integration periodischer Funktionen über volle Periodenlänge

Bsp: Vgl Konvergenzeigenschaften:

$$\int_0^a \underbrace{\frac{3}{\sqrt{7+\sin\varphi}}}_{f(\varphi)}\,d\varphi$$

- Trapezsumme ($p=2$) für $a=\pi$
- Trapezsumme für $a=2\pi$ (viel schneller für 2π als π!)

Wieso?

Bild b.w.

$f\in C^\infty(\mathbb{R})$, periodisch mit Periode $b-a$: Euler-Maclaurin gibt:

$$T(h)=\int_a^b f(x)\,dx+\sum_{\ell=1}^{m+1}\frac{B_{2\ell}}{(2\ell)!}\underbrace{f^{(2\ell-1)}\Big|_a^b}_{=0!}h^{2\ell}+O(h^{2m+4})$$

$$=\int_a^b f(x)\,dx+O(h^N)\qquad=\int_a^b f(x)\,dx+\text{"}O(h^\infty)\text{"}$$

$\boxed{N \text{ beliebig groß!}}$

schneller als polynomielle Konvergenz beliebiger Ordnung

Es gilt für f holomorph in Umgebung von $[a,b]$:

$$T(h)=\int_a^b f(x)\,dx+O(e^{-ch^{-1}}),\quad\text{für ein } c>0.$$

c hängt von Singularitäten von f nahe $[a,b]$ ab.

$\boxed{\text{exponentielle / geometrische Konvergenz}}$

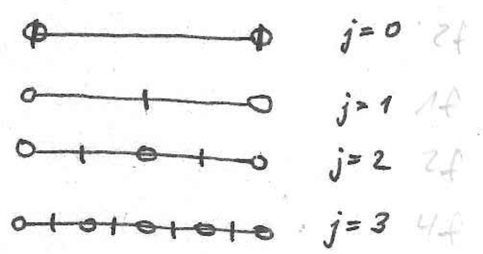
4.24 Die Romberg-Folge

Ziel: möglichst wenig f-Auswertungen, $E_h(f)=P_n(0)$ soll vom positiven Typ sein

Gitterweiten: $h_j=2^{-j}h_0$, $j=0,\dots,m$, $h_0=\frac{b-a}{m}$

Aufwand: $2+\sum_{j=1}^{m}2^{j-1}=2^m+1$ f-Auswertungen

$=$ Aufwand von Trapezregel mit $h=2^{-m}h_0$



+ : neue Auswertungen
–o– : schon bekannt

Genauigkeit:

- Trapez, $h=2^{-m}h_0$: $O(2^{-2m}h_0)$
- Extrap, $j=0,\dots,m$: $O(h_0^2\cdot 2^{-2}h_0^2\cdot 2^{-4}h_0^2\cdots 2^{-2m}h_0^2)=O(2^{-m(m+1)}h_0^{2m})$

Man kann zeigen, daß die Extrap. mit Romberg-Folge auf positive QF führt.

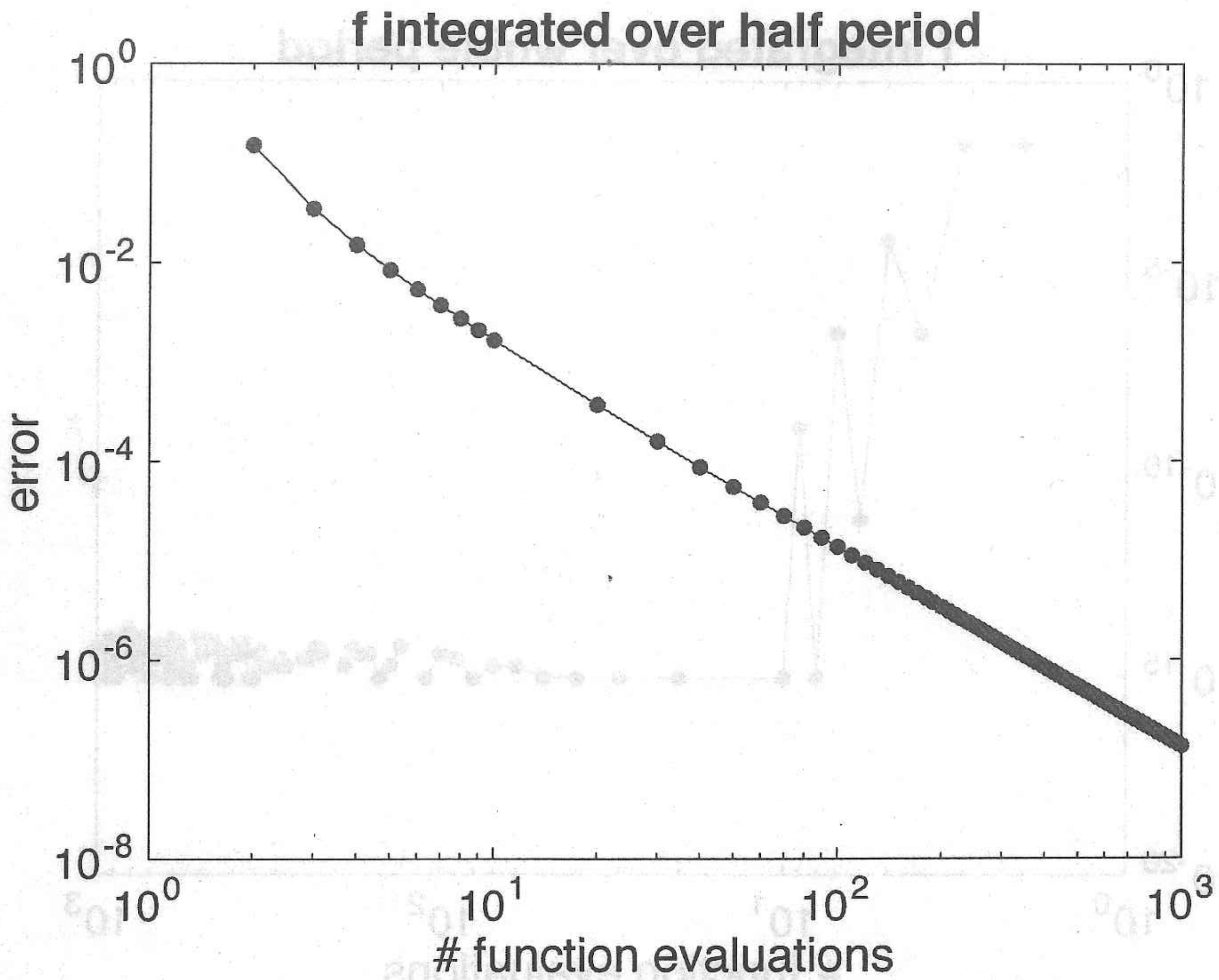
Aufwand: $N=2^m \Rightarrow m=\log_2 N$

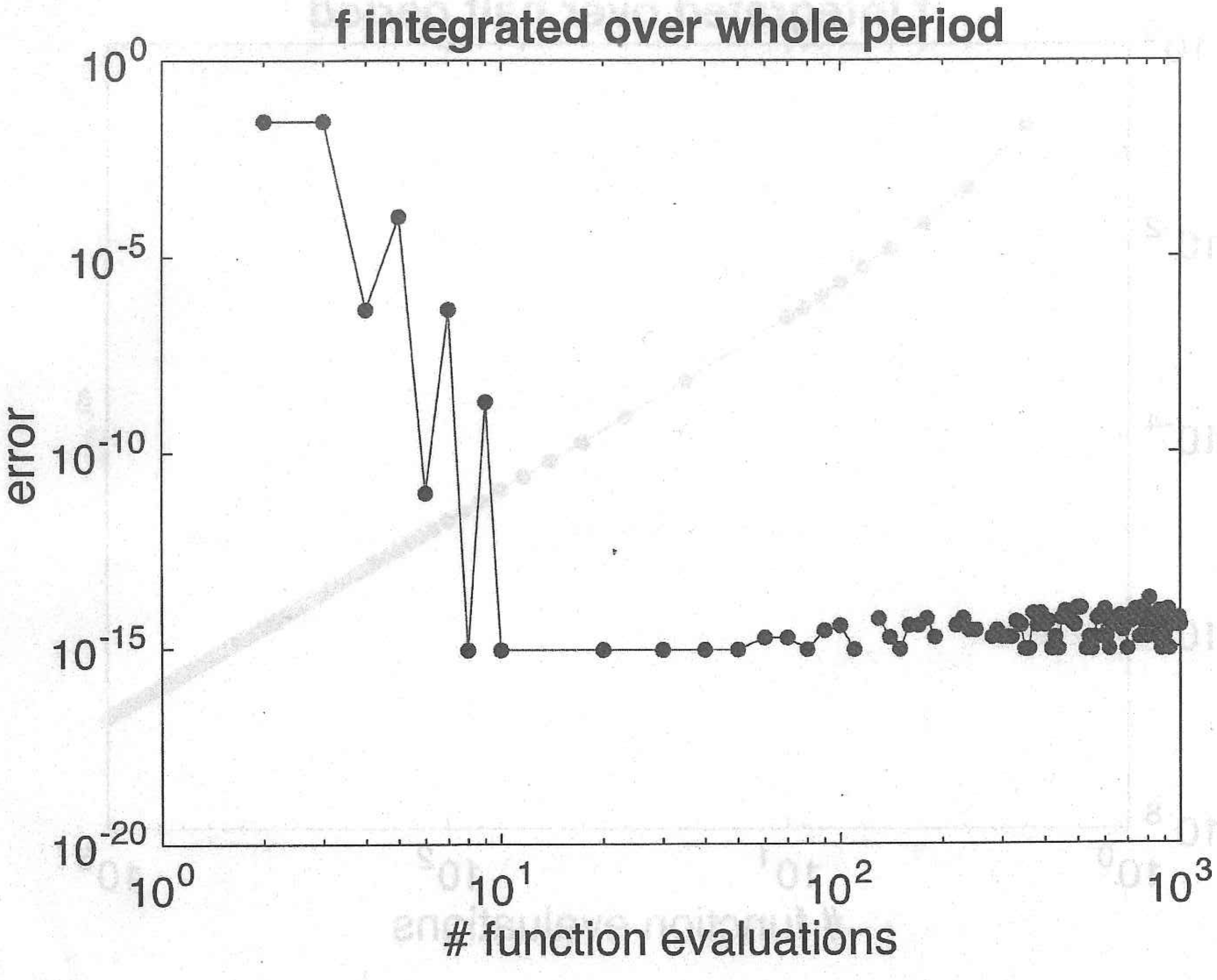
$\Rightarrow$ Trapez: Fehler $=O(N^{-2})$

Extrap.: Fehler $=O(N^{2\log_2 h_0-\log_2 N})$

Trapezregel für $\int_0^{\pi} f(x)dx$ und $\int_0^{2\pi} f(x)dx$, mit

$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{7+\sin(x)}}$$




f integrated over whole period
error
function evaluations
10^0
10^-5
10^-10
10^-15
10^-20
10^0
10^1
10^2
10^3

IV. 3 ADAPTIVE MULTILEVEL-QUADRATUR

4.25 Aufgabe und adaptives Prinzip

Ziel: Funktion f, a, b, TOL $\to$ $\boxed{\text{Adaptives Programm}}$ $\to$ $I_\Delta(f) \approx I(f)$

Wünsche: 1) Genauigkeit:

$$|I_\Delta(f) - I(f)| \leq TOL \quad \text{(absolut)}$$

$$-\|- \quad \leq TOL\, I(f) \quad \text{(relativ)}$$

2) Kostenoptimal:

$$\#\, f\text{-Auswertungen} \approx \min!$$

Notwendigkeit: bisher waren Fehlerabschätzungen in $\|f^{(n)}\|_\infty$ gegeben. Problem, wenn f nicht ausreichend glatt.