Zuse Institute Berlin (ZIB)
Freie Universität Berlin
S. Röblitz, P. Koltai, S. Winkelmann, L. Fischer

Aufgabenblatt 1

Numerik I, SS 2018

Abgabe: 23. April 2018, 18:00 Uhr (Tutorenfach)

Allgemeine Hinweise: Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Alle Programmieraufgaben und Protokolle müssen pünktlich per E-Mail als Anhang an den jeweiligen Tutor geschickt werden. Aus dem Text der E-Mail muss hervorgehen, wer an der Bearbeitung der Aufgaben mitgewirkt hat. Die Theorieaufgaben sind abzugeben in das Fach des Tutors (Arnimallee 3, 1. OG). Außerdem können zusätzlich und freiwillig Ausdrucke der Dateien abgegeben werden, falls eine detaillierte Korrektur des Codes erwünscht ist. Beachten Sie ferner die Hinweise zur Bearbeitung der Programmieraufgaben auf der Homepage zur Vorlesung:
`http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2018/NumerikI.php`

Aufgabe 1 (Lokale Konvergenz, 4 TP)
Sei die Abbildung $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit Fixpunkt $x^* \in \mathbb{R}$ und $|\phi'(x^*)| \neq 1$. Zeigen Sie, dass dann mindestens eine der Iterationsvorschriften

a) $x_{k+1} := \phi(x_k)$,

b) $y_{k+1} := \phi^{-1}(y_k)$

lokal gegen x^* konvergiert.

Aufgabe 2 (Fixpunkte, 4 TP)
Es sei $g(x) = x + \frac{1}{1+x}$ und $M = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Zeigen Sie:

a) $g(M) \subset M$,

b) $|g(x) - g(y)| < |x - y|$ für alle $x, y \in M$, $x \neq y$,

c) g besitzt *keinen* Fixpunkt in M.

Warum ist dies kein Widerspruch zum Banachschen Fixpunktsatz?

Aufgabe 3 (Globale Konvergenz, 2 TP + 2 PP)
Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$F(x) := F(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x_2^2 + \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4}x_1^2 - \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

a) Beweisen Sie die Existenz eines eindeutigen Fixpunktes von F in

$$D := \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x||_\infty \leq 1\}.$$

b) Berechnen Sie den Fixpunkt näherungsweise durch Fixpunktiteration. Nutzen Sie den a posteriori Fehlerschätzer, um die Iteration abzubrechen, sobald Sie eine Genauigkeit von 10^{-8} garantieren können. Dokumentieren Sie Ihre Näherungen.