Zuse Institute Berlin (ZIB)
Freie Universität Berlin
S. Röblitz, P. Koltai, S. Winkelmann, L. Fischer

Aufgabenblatt 10

Numerik I, SS 2018

Abgabe: 25. Juni 2018, 16:00 Uhr (Tutorenfach)

Allgemeine Hinweise: Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Alle Programmieraufgaben und Protokolle müssen pünktlich per E-Mail als Anhang an den jeweiligen Tutor geschickt werden. Aus dem Text der E-Mail muss hervorgehen, wer an der Bearbeitung der Aufgaben mitgewirkt hat. Die Theorieaufgaben sind abzugeben in das Fach des Tutors (Arnimallee 3, 1. OG). Außerdem können zusätzlich und freiwillig Ausdrucke der Dateien abgegeben werden, falls eine detaillierte Korrektur des Codes erwünscht ist. Beachten Sie ferner die Hinweise zur Bearbeitung der Programmieraufgaben auf der Homepage zur Vorlesung:

`http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2018/NumerikI.php`

Sie haben außerdem die Möglichkeit, beim Matlab-Tutorium am Freitag (10-12 Uhr, Raum 030, A6) Hilfestellung für die Programmieraufgaben zu bekommen.

Aufgabe 1 (Multilevel-Quadratur, 8 PP)

a) Implementieren ein Verfahren zur adaptiven Multilevel-Quadratur mit Hilfe der Trapez- bzw. Simpson-Regel. Genauer, schreiben Sie eine Funktion

```
y = multilevel_quad(f_handle,a,b,n,Nmax,tol),
```

wobei `f_handle` ein Funktionen-Handle der zu integrierenden Funktion, `a` bzw. `b` die untere bzw. obere Integrationsgrenze, `n` die Anzahl der zu Beginn gegebenen äquidistanten Intervalle, `Nmax` die maximal zulässige Anzahl an Intervallen und `tol` die für das Abbruchkriterium verwendete Toleranz beschreibt.

Nehmen Sie die Saturationsbedingung für die übergebene Funktion an. Berechnen Sie zum Gitter Δ_j im j-ten Schritt des Verfahrens für alle Teilintervalle $I_{k,j}$ lokale a posteriori Fehlerschätzungen $e_{I_{k,j}}(f)$ des Diskretisierungsfehlers in $I_{k,j}$ mit der Simpson-Regel.

Brechen Sie das Verfahren ab, sobald die Anzahl an Intervallen den Wert `Nmax` überschreitet oder der geschätzte globale Fehler $e_{\Delta_j}(f) = \sum_k e_{I_{k,j}}(f)$ die Genauigkeitsbedingung $|e_{\Delta_j}(f)| \leq \frac{1}{2}\texttt{tol}$ erfüllt. Andernfalls verfeinern Sie diejenigen Intervalle $I_{k,j}$ mit maximalem $|e_{I_{k,j}}(f)|$, indem Sie deren Mittelpunkte zu Δ_j hinzufügen um Δ_{j+1} zu erhalten.

b) Testen Sie Ihre Implementation anhand der Integrale

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx, \quad \int_0^\pi \sin(x)\,dx, \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{1+(\gamma x)^2}\,dx = \frac{2}{\gamma}\arctan(\gamma)$$

mit $\gamma = 1, 10, 100, 500$. Wählen Sie $\texttt{n} = 10$, $\texttt{Nmax} = 1000$ und $\texttt{tol} = 10^{-10}$. Plotten Sie anschließend den exakten Fehler gegen die Anzahl der verwendeten Stützstellen unter Verwendung einer geeigneten logarithmischen Skalierung. Plotten Sie zum Vergleich jeweils auch den exakten Fehler der summierten Trapez-Regel mit uniformem Gitter und gleicher Anzahl an Quadraturpunkten. Was beobachten Sie?

Aufgabe 2 (Autonomisierung, 4 TP)
Sei $y : [T_0, T_1] \to \mathbb{R}^d$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = F(y(t), t), \quad t \in (T_0, T_1], \quad y(T_0) = y_0. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass sich dieses nicht-autonome Anfangswertproblem autonomisieren lässt, indem Sie ein $x : [T_0, T_1] \to \mathbb{R}^{d+1}$ sowie eine Funktion f und einen Startwert x_0 konstruieren, so dass folgendes gilt: x ist genau dann Lösung des autonomen Anfangswertproblems

$$x'(t) = f(x(t)), \quad t \in (T_0, T_1], \quad x(T_0) = x_0,$$

wenn y eine Lösung von (1) ist.