Zuse Institute Berlin (ZIB)
Freie Universität Berlin
S. Röblitz, P. Koltai, S. Winkelmann, L. Fischer

Aufgabenblatt 11

Numerik I, SS 2018

Abgabe: 2. Juli 2018, 16:00 Uhr (Tutorenfach)

Allgemeine Hinweise: Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Alle Programmieraufgaben und Protokolle müssen pünktlich per E-Mail als Anhang an den jeweiligen Tutor geschickt werden. Aus dem Text der E-Mail muss hervorgehen, wer an der Bearbeitung der Aufgaben mitgewirkt hat. Die Theorieaufgaben sind abzugeben in das Fach des Tutors (Arnimallee 3, 1. OG). Außerdem können zusätzlich und freiwillig Ausdrucke der Dateien abgegeben werden, falls eine detaillierte Korrektur des Codes erwünscht ist. Beachten Sie ferner die Hinweise zur Bearbeitung der Programmieraufgaben auf der Homepage zur Vorlesung:

`http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2018/NumerikI.php`

Sie haben außerdem die Möglichkeit, beim Matlab-Tutorium am Freitag (10-12 Uhr, Raum 030, A6) Hilfestellung für die Programmieraufgaben zu bekommen.

Aufgabe 1 (Kondition, 4 TP)

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$mx''(t) = -Dx(t), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}, \quad x'(0) = v_0 \in \mathbb{R} \tag{1}$$

für $m, D > 0$.

a) Formulieren Sie (1) als AWP erster Ordnung der Form $y'(t) = f(y(t))$, $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^2$.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion f Lipschitzstetig ist, und geben Sie mithilfe der Lipschitzkonstanten eine Abschätzung für die punktweise Kondition $\kappa(t)$ in der $||\cdot||_1$-Norm an.

Hinweis: Es gilt $||A||_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$ *für eine Matrix* $A \in \mathbb{R}^{m,n}$.

c) Berechnen Sie die zugehörige Wronski-Matrix $W(t)$ und damit eine Abschätzung für die punktweise Kondition $\kappa(t)$ in der $||\cdot||_1$-Norm.

Hinweis: Die Lösung von (1) *ist gegeben durch* $x(t) = x_0 \cos(wt) + \frac{v_0}{w}\sin(wt)$ *mit* $w^2 = \frac{D}{m}$.

Aufgabe 2 (Konsistenz expliziter Einschrittverfahren, 4 TP)
Es sei ψ^τ ein explizites Einschrittverfahren zur numerischen Lösung des Anfangswertproblems

$$x'(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^d.$$

Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

a) ψ^τ ist konsistent, d.h. für den Konsistenzfehler gilt $\varepsilon(x,\tau) = \mathrm{o}(\tau)$.

b) Es gilt $\psi^0 x = x$ und $\frac{d}{d\tau}\psi^\tau x|_{\tau=0} = f(x)$.

c) Es gilt $\psi^\tau x = x + \tau h(x,\tau)$ für eine in τ stetige Funktion h mit $h(x,0) = f(x)$.

Aufgabe 3 (Taylorverfahren, 4 PP)
Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$x'(t) = f(x), \quad t \in [T_0, T_1], \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^d$$

mit $f \in C^1(\mathbb{R}^d)$.

a) Schreiben Sie ein `MATLAB`-Programm

```
[t,x] = EulerEx(f,tspan,x0,N)
```

zur numerischen Lösung des Problems mittels des expliziten Eulerverfahrens, sowie ein `MATLAB`-Programm

```
[t,x] = Taylor(f,Df,tspan,x0,N)
```

zur numerischen Lösung des Problems mittels des Taylor-Verfahrens 2. Ordnung, jeweils unter Wahl einer uniformen Schrittweite $\tau = (T_1 - T_0)/N$ und Eingabe von

`f`	Funktionen-Handle für f,
`Df`	Funktionen-Handle für die Ableitung Df,
`tspan`	Vektor zur Bestimmung von $[T_0, T_1]$,
`x0`	Vektor für den Anfangswert x_0,
`N`	natürlichen Zahl für die Anzahl der Schritte N,

und Ausgabe von

`t`	Vektor der Stützstellen,
`x`	$d \times \|$`t`$\|$-Matrix der approximierten Lösung an den Stützstellen.

b) Wenden Sie die Programme auf das Anfangswertproblem

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x, \quad t \in [0, 2\pi], \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

an und analysieren Sie die Ordnung der beiden Verfahren, indem Sie die Ergebnisse mit der exakten Lösung vergleichen und den Fehler in Abhängigkeit von τ graphisch darstellen.