Zuse Institute Berlin (ZIB)
Freie Universität Berlin
S. Röblitz, P. Koltai, S. Winkelmann, L. Fischer

Aufgabenblatt 12

Numerik I, SS 2018

Abgabe: 9. Juli 2018, 16:00 Uhr (Tutorenfach)

Allgemeine Hinweise: Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Alle Programmieraufgaben und Protokolle müssen pünktlich per E-Mail als Anhang an den jeweiligen Tutor geschickt werden. Aus dem Text der E-Mail muss hervorgehen, wer an der Bearbeitung der Aufgaben mitgewirkt hat. Die Theorieaufgaben sind abzugeben in das Fach des Tutors (Arnimallee 3, 1. OG). Außerdem können zusätzlich und freiwillig Ausdrucke der Dateien abgegeben werden, falls eine detaillierte Korrektur des Codes erwünscht ist. Beachten Sie ferner die Hinweise zur Bearbeitung der Programmieraufgaben auf der Homepage zur Vorlesung:

`http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2018/NumerikI.php`

Sie haben außerdem die Möglichkeit, beim Matlab-Tutorium am Freitag (10-12 Uhr, Raum 030, A6) Hilfestellung für die Programmieraufgaben zu bekommen.

Aufgabe 1 (Normerhaltung, 6 TP und 2 PP)

Betrachten Sie für $x(t) \in \mathbb{R}^2$ das Anfangswertproblem

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x(t), \quad x(0) = x_0. \tag{$*$}$$

a) Zeigen Sie, ohne die Lösung des Problems zu berechnen, dass $||x(t)||_2 = ||x_0||_2$ für alle Zeiten $t \geq 0$ gilt. Das bedeutet, die Lösung ist normerhaltend.

b) Berechnen Sie und plotten Sie eine approximative Lösung von $(*)$ für $x_0 = (0,1)^T$ und $t \in [0, 1000]$ mit dem expliziten Euler-Verfahren und mit dem impliziten Euler-Verfahren und Schrittweite jeweils $\tau = 0.01$. Letzteres ist gegeben durch die Iterationsvorschrift $x_{k+1} = x_k + \tau f(x_{k+1})$ für eine Differentialgleichung mit rechter Seite f. Welchen qualitativen Unterschied beobachten Sie zwischen den Lösungen der beiden Verfahren für $t \to \infty$?

c) Zeigen Sie, dass für eine diagonalisierbare Matrix A gilt:

   i) Gilt $|\lambda| < 1$ für alle Eigenwerte λ von A, so folgt $\|A^k\|_2 \to 0$ für $k \to \infty$.

   ii) Gibt es einen Eigenwert λ von A mit $|\lambda| > 1$, dann gilt $\|A^k\|_2 \to \infty$ für $k \to \infty$.

d) Erklären Sie mittels c) Ihre Beobachtungen aus b).

Aufgabe 2 (Runge-Kutta-Verfahren, 2 TP und 4 PP)
Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$x'(t) = f(x), \quad t \in (T_0, T_1], \quad x(0) = x_0$$

mit $f \in C(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Schreiben Sie ein `MATLAB`-Programm

```
[t,x,c] = RungeKuttaEx(f,tspan,x0,N,b,A)
```

für ein explizites Runge-Kutta-Verfahren, welches durch `b` und `A` aus dem Butcher-Schema gegeben ist. Dabei ist die Eingabe gegeben durch

`f`	Funktionen-Handle für f,
`tspan`	Vektor zur Bestimmung von $(T_0, T_1]$,
`x0`	Skalar für den Anfangswert x_0,
`N`	natürlichen Zahl für die Anzahl der Schritte N

bei Wahl einer uniformen Schrittweite $\tau = (T_1 - T_0)/N$, und die Ausgabe gegeben durch

`t`	Vektor der Stützstellen,
`x`	Vektor der approximierten Lösung an den Stützstellen,
`c`	Anzahl der durchgeführten Funktionsauswertungen.

Testen Sie ihr Programm mit dem Anfangswertproblem

$$x'(t) = \frac{\gamma}{1 + \tan^2(x(t))}, \quad t \in (0, 2], \quad x(0) = -\frac{\pi}{4},$$

indem Sie das explizite Euler-Verfahren, das Verfahren von Runge und Runge-Kutta-4-Verfahren wie folgt anwenden:

a) Zeigen Sie, dass
$$x(t) = \arctan\left(\tan\left(\frac{-\pi}{4}\right) + \gamma t\right)$$
die exakte Lösung ist und plotten Sie diese im Vergleich zu den Lösungen der Verfahren für $\gamma = 100$ und $N = 2^4, \ldots, 2^9$.

b) Berechnen Sie für $\gamma = 1, 10, 100, 1000$ jeweils die Fehler
$$e(\tau) = \max_k |x(t_k) - x_k|$$
für $\tau = 2^{-3}, \ldots, 2^{-8}$ (d.h. $N = 2^4, \ldots, 2^9$) und plotten Sie diese in einer doppelt logarithmischen Skala für jedes Verfahren über der Anzahl der f-Auswertungen.

a) Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.