Zuse Institute Berlin (ZIB)
Freie Universität Berlin
S. Röblitz, P. Koltai, S. Winkelmann, L. Fischer

Aufgabenblatt 13

Numerik I, SS 2018

Freiwillige Abgabe: 16. Juli 2018, 16:00 Uhr (Tutorenfach)

Allgemeine Hinweise: Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Alle Programmieraufgaben und Protokolle müssen pünktlich per E-Mail als Anhang an den jeweiligen Tutor geschickt werden. Aus dem Text der E-Mail muss hervorgehen, wer an der Bearbeitung der Aufgaben mitgewirkt hat. Die Theorieaufgaben sind abzugeben in das Fach des Tutors (Arnimallee 3, 1. OG). Außerdem können zusätzlich und freiwillig Ausdrucke der Dateien abgegeben werden, falls eine detaillierte Korrektur des Codes erwünscht ist. Beachten Sie ferner die Hinweise zur Bearbeitung der Programmieraufgaben auf der Homepage zur Vorlesung:

`http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2018/NumerikI.php`

Sie haben außerdem die Möglichkeit, beim Matlab-Tutorium am Freitag (10-12 Uhr, Raum 030, A6) Hilfestellung für die Programmieraufgaben zu bekommen.

Aufgabe 1 (Adaptive Schrittweitensteuerung, 8 Zusatz-PP)
Man betrachte die folgenden beiden Anfangswertprobleme.

(i) Van-der-Pol-System:

$$x''(t) = 10(1 - x(t)^2)x'(t) - x(t), \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 1,\ t \in [0, 20].$$

(ii) Restringiertes 3-Körper-Problem (Bahnverlauf eines Körpers in der Ebene $\mathbb{R}^2$ unter Krafteinwirkung zweier anderer Körper im mitrotierenden Koordinatensystem, z.B. Satelliten im Sonne-Erde-Gravitationsfeld):

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t)) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [0, T],$$

mit

$$x_1''(t) = x_1(t) + 2x_2'(t) - \mu_2 \frac{x_1(t) + \mu_1}{D_1(t)} - \mu_1 \frac{x_1(t) - \mu_2}{D_2(t)},$$
$$x_2''(t) = x_2(t) - 2x_1'(t) - \mu_2 \frac{x_2(t)}{D_1(t)} - \mu_1 \frac{x_2(t)}{D_2(t)}$$

und

$$x_1(0) = 0.994, \quad x_2(0) = 0, \quad x_1'(0) = 0, \quad x_2'(0) = -2.001158510637908,$$

wobei

$$D_1(t) = \left((x_1(t) + \mu_1)^2 + x_2(t)^2\right)^{3/2}, \quad D_2(t) = \left((x_1(t) + \mu_2)^2 + x_2(t)^2\right)^{3/2},$$
$$\mu_1 = 0.012277471, \quad \mu_2 = 1 - \mu_1, \quad T = 17.06521656015796.$$

a) Implementieren Sie den Algorithmus zur adaptiven Schrittweitensteuerung (Algorithmus 5.22 im Skript) unter Verwendung des expliziten Euler-Verfahrens und des Verfahrens von Runge und testen Sie den Algorithmus anhand der beiden Anfangswertprobleme.

b) Stellen Sie die Lösung $x(t)$ jeweils graphisch dar, und zwar für (i) als Funktion $x(t)$ der Zeit t und für (ii) als Orbit in $\mathbb{R}^2$ (zur Kontrolle: er sollte periodisch sein).

c) Analysieren Sie die Abhängigkeit der Schrittweite vom Zustand des Systems. Für (i) können Sie die Schrittweite in Abhängigkeit der Zeit plotten und mit der Trajektorie $x(t)$ vergleichen. Für (ii) können Sie die Schrittweite durch farbliche Markierung des Orbits kenntlich machen. (D.h. jeder Punkt $x(t_j)$ bekommt eine Farbe abhängig von τ_j. Dazu können Sie die Matlab-Funktion `scatter` verwenden.)

d) Analysieren Sie für (ii) den Fehler $\|x(0) - x(T)\|_2$ in Abhängigkeit von

$$TOL \in \{10^{-1}, 10^{-2}, ...\}.$$