

**Aufgabenblatt 2**  
Numerik I, SS 2018

---

Abgabe: 30. April 2018, 16:00 Uhr (Tutorenfach)

---

*Allgemeine Hinweise: Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Alle Programmieraufgaben und Protokolle müssen pünktlich per E-Mail als Anhang an den jeweiligen Tutor geschickt werden. Aus dem Text der E-Mail muss hervorgehen, wer an der Bearbeitung der Aufgaben mitgewirkt hat. Die Theorieaufgaben sind abzugeben in das Fach des Tutors (Arnimallee 3, 1. OG). Außerdem können zusätzlich und freiwillig Ausdrucke der Dateien abgegeben werden, falls eine detaillierte Korrektur des Codes erwünscht ist. Beachten Sie ferner die Hinweise zur Bearbeitung der Programmieraufgaben auf der Homepage zur Vorlesung:*

[http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS\\_2018/NumerikI.php](http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2018/NumerikI.php)

**Aufgabe 1 (Newton-Iteration, 3 TP + 3 PP)**

Betrachten Sie das Nullstellenproblem  $f(x) = x(x - \pi)^2 = 0$  mit den zwei Nullstellen  $x^* = 0$  und  $x^{**} = \pi$ .

- Wenden Sie das Newton-Verfahren auf das Nullstellenproblem an, starten Sie dieses einmal mit  $x_0 = -1$  und einmal mit  $y_0 = 4$ . Stellen Sie die Fehler  $|x_n - \xi|$  und  $|y_n - \xi|$  halblogarithmisch über  $n$  dar; hierbei bezeichnet  $\xi \in \{x^*, x^{**}\}$  die jeweilige Nullstelle, gegen die die Folge  $\{x_n\}$  bzw.  $\{y_n\}$  konvergiert. *Hinweis: Verwenden Sie das Matlab-Programm `semilogy`.*
- Welche Konvergenzgeschwindigkeiten beobachten Sie? Stimmt dies mit Ihren Erwartungen überein? Begründen Sie das beobachtete *qualitativ*. *Hinweis: Denken Sie an die Kondition des Nullstellenproblems und an den Konvergenzsatz aus der Vorlesung.*
- Sei nun  $\xi$  die zur Folge  $\{y_n\}$  gehörige Nullstelle, und sei  $\tilde{y}_n := y_n - \xi$ . Geben Sie  $\tilde{y}_n$  in Abhängigkeit von  $\tilde{y}_0$  an und erklären Sie damit *quantitativ* Ihre Beobachtung aus a).
- Betrachten wir das Nullstellenproblem für  $g(x) := f(x) + 10^{-6}$ . Was ergibt das Newton-Verfahren für die obigen Startwerte  $x_0$  und  $y_0$ ? Erklären Sie das Beobachtete.
- Implementieren Sie das Newton-Verfahren mit natürlichem Monotonietest. Was ergibt dieses für die Iterationen aus d)?

**Aufgabe 2 (Bestapproximation, 4 TP (bis 7. Mai))**

Gegeben sei der normierte Vektorraum  $V = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ , der Unterraum  $U = \{u = (u_1, u_2) \in V : u_1 - u_2 = 0\}$  sowie  $f = (2, 4) \in V$ .

- a) Formulieren Sie die entsprechende Bestapproximationsaufgabe. Ist sie lösbar? Ist eine etwaige Lösung eindeutig?
- b) Geben Sie die zur Bestapproximationsaufgabe äquivalente Normalengleichung an.
- c) Laut Skript läßt sich die Bestapproximationsaufgabe  $p \in U$  über eine orthogonale Projektion  $P$  charakterisieren. Wie lautet der Zusammenhang? Geben Sie die Projektion  $P$  explizit an und berechnen Sie damit die Bestapproximationsaufgabe  $p \in U$  an  $f = (2, 4)$ .

**Aufgabe 3 (Prähilbertraum, 2 TP)**

Zeigen Sie, dass ein Prähilbertraum strikt konvex ist. *Hinweis: In einem Prähilbertraum gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.*