Zuse Institute Berlin (ZIB)
Freie Universität Berlin
S. Röblitz, P. Koltai, S. Winkelmann, L. Fischer

Aufgabenblatt 3

Numerik I, SS 2018

Abgabe: 7. Mai 2018, 16:00 Uhr (Tutorenfach)

Allgemeine Hinweise: Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Alle Programmieraufgaben und Protokolle müssen pünktlich per E-Mail als Anhang an den jeweiligen Tutor geschickt werden. Aus dem Text der E-Mail muss hervorgehen, wer an der Bearbeitung der Aufgaben mitgewirkt hat. Die Theorieaufgaben sind abzugeben in das Fach des Tutors (Arnimallee 3, 1. OG). Außerdem können zusätzlich und freiwillig Ausdrucke der Dateien abgegeben werden, falls eine detaillierte Korrektur des Codes erwünscht ist. Beachten Sie ferner die Hinweise zur Bearbeitung der Programmieraufgaben auf der Homepage zur Vorlesung:
`http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2018/NumerikI.php`

Aufgabe 1 (Bestapproximation, 4 TP)
Gegeben sei der normierte Vektorraum $V = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, der Unterraum $U = \{u = (u_1, u_2) \in V : u_1 - u_2 = 0\}$ sowie $f = (2, 4) \in V$.

a) Formulieren Sie die entsprechende Bestapproximationsaufgabe. Ist sie lösbar? Ist eine etwaige Lösung eindeutig?

b) Geben Sie die zur Bestapproximationsaufgabe äquivalente Normalengleichung an.

c) Laut Skript läßt sich die Bestapproximationsaufgabe $p \in U$ über eine orthogonale Projektion P charakterisieren. Wie lautet der Zusammenhang? Geben Sie die Projektion P explizit an und berechnen Sie damit die Bestapproximationsaufgabe $p \in U$ an $f = (2, 4)$.

Aufgabe 2 (Projektionen, 2 TP)
Sei X ein Prähilbertraum und $P : X \to X$ linear. Zeigen Sie, dass dann folgende Aussagen äquivalent sind:

a) $(x - Px, y) = 0$ für alle $x \in X$, $y \in R(P) = \{Pw \mid w \in X\}$

b) $P^2 = P$ und $(Px, y) = (x, Py)$ für alle $x, y \in X$

Aufgabe 3 (Tschebyscheff-Polynome, 4 TP)
Die *Tschebyscheff-Polynome 1. Art* sind gegeben durch

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)) \quad n = 0, 1, \ldots$$

(vgl. Skript). Zeigen Sie:

a) Die Polynome erfüllen die Dreiterm-Rekursion

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Hinweis: Es gilt $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$.

b) Es ist T_n ein Polynom n-ter Ordnung, und es gilt $||T_n||_\infty \leq 1$ für alle $n = 0, 1, \ldots$.

c) Die Polynome $(T_n)_{n=0}^\infty$ bilden *keine* Orthogonalbasis bezüglich des L^2-Skalarproduktes.

d) Die Polynome $(T_n)_{n=0}^\infty$ bilden eine Orthogonalbasis bezüglich des gewichteten Skalarproduktes

$$(v, w) = \int_{-1}^{1} \frac{v(x)\,w(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Hinweis: Es gilt $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$.

Aufgabe 4 (Orthogonalbasis, 2 TP)
Es sei $(\varphi_i)_{i=0}^n$ eine Orthogonalbasis von $\mathcal{P}_n \subset C[-1, 1]$ bezüglich des Skalarproduktes

$$(v, w) = \int_{-1}^{1} v(x)w(x)\,dx, \quad v, w \in C[-1, 1].$$

Mithilfe einer Transformation $\tau : [a, b] \to [-1, 1]$ wird über $\tilde{\varphi}_i = \varphi_i \circ \tau$ eine Basis $(\tilde{\varphi}_i)_{i=0}^n$ von $\mathcal{P}_n \subset C[a, b]$, $a < b$, für das Skalarprodukt

$$(v, w) = \int_{a}^{b} v(y)w(y)\,dy, \quad v, w \in C[a, b]$$

definiert. Bestimmen Sie eine möglichst einfache Funktion τ so, dass auch $(\tilde{\varphi}_i)_{i=0}^n$ eine Orthogonalbasis ist.

Aufgabe 5 (Approximation stetiger Funktionen, 4 TP)
Sei $V = C[-1, 1]$, $f(x) = 3x^3$ und $U = \mathcal{P}_2$. Berechnen Sie die Tschebyscheff- und die L^2-Approximation von f in U. Ermitteln Sie den Fehler der beiden Approximationen in der Supremums- sowie der L^2-Norm.