Zuse Institute Berlin (ZIB)
Freie Universität Berlin
S. Röblitz, P. Koltai, S. Winkelmann, L. Fischer

Aufgabenblatt 4
Numerik I, SS 2018

Abgabe: 14. Mai 2018, 16:00 Uhr (Tutorenfach)

Allgemeine Hinweise: Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Alle Programmieraufgaben und Protokolle müssen pünktlich per E-Mail als Anhang an den jeweiligen Tutor geschickt werden. Aus dem Text der E-Mail muss hervorgehen, wer an der Bearbeitung der Aufgaben mitgewirkt hat. Die Theorieaufgaben sind abzugeben in das Fach des Tutors (Arnimallee 3, 1. OG). Außerdem können zusätzlich und freiwillig Ausdrucke der Dateien abgegeben werden, falls eine detaillierte Korrektur des Codes erwünscht ist. Beachten Sie ferner die Hinweise zur Bearbeitung der Programmieraufgaben auf der Homepage zur Vorlesung:
`http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2018/NumerikI.php`

Aufgabe 1 (Givens-Rotation, 2 TP + 2 PP)
Berechnen Sie zu einem Gitter $0 = x_0 < x_1 < ... < x_m = 2\pi$ mit $m+1$ Gitterpunkten das Polynom $p_n \in \mathcal{P}_n$ vom Grad n, das die folgende Bestapproximationsaufgabe löst:

$$\sum_{i=0}^{m}(p_n(x_i) - \sin(x_i))^2 \leq \sum_{i=0}^{m}(q_n(x_i) - \sin(x_i))^2 \quad \forall q_n \in \mathcal{P}_n$$

a) Schreiben Sie die Bestapproximationsaufgabe in Form eines linearen Ausgleichsproblems

$$x \in \mathbb{R}^{n+1}: \quad \|b - Ax\|_2 \leq \|b - Ay\|_2 \quad \forall y \in \mathbb{R}^{n+1}$$

b) Schreiben Sie ein `MATLAB`-Programm, das das lineare Ausgleichsproblem mittels Givens-Rotationen löst. Testen Sie Ihr Programm für mehrere Gitter mit verschiedenen Werten für m und $n \leq m$. Welches Resultat erhält man für $m = n$?

Aufgabe 2 (Kleinste Fehlerquadrate, 3 TP + 1 PP)
Für diese Aufgabe sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ m \geq n$ mit vollem Spaltenrang und $b \in \mathbb{R}^m$.

a) Es sei $\tilde{Q}\tilde{R} = (A\ b) \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ die reduzierte QR-Zerlegung der um die Spalte b ergänzten Matrix A. Die Diagonale von $\tilde{R}$ ist dabei positiv.
Zeigen Sie: Mit $\tilde{R} = \begin{pmatrix} R & r \\ & \rho \end{pmatrix}$, wobei $R \in \mathbb{R}^{n\times n},\ r \in \mathbb{R}^n, \rho \in \mathbb{R}$, gilt für die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ des linearen Ausgleichsproblems

$$\|b - Ax\|_2 = \min!$$

dass

$$Rx = r, \qquad \rho = \|b - Ax\|_2.$$

b) Geben Sie ein `MATLAB`-Programm an, das die Methode aus (a) implementiert, um das Ausgleichsproblem *ohne Verwendung* von Q zu lösen.

Aufgabe 3 (Householder-Reflexion, 4 PP)
Programmieren Sie die QR-Zerlegung mittels der Householder-Reflexion aus der Vorlesung. Testen Sie Ihr Programm und vergleichen Sie es mit dem klassischen Gram-Schmidt-Algorithmus (`gs.m` auf der Homepage) anhand der folgenden Matrix A:

```
U = qr(rand(30));
V = qr(rand(30));
S = diag(2.^(-1:-1:-30));
A = U*S*V;
```

Rechnen Sie dazu jeweils $\|Q^T Q - I\|$ und $\|QR - A\|$ aus um zu sehen, "wie orthogonal" das jeweilige Q ist bzw. wie gut das Produkt QR die Matrix A approximiert.