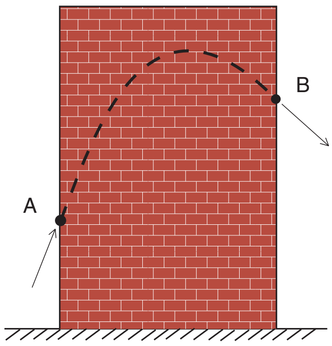
Zuse Institute Berlin (ZIB)
Freie Universität Berlin
S. Röblitz, P. Koltai, S. Winkelmann, L. Fischer

Aufgabenblatt 5
Numerik I, SS 2018

Abgabe: 22. Mai 2018, 09:00 Uhr (Tutorenfach)

Allgemeine Hinweise: Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Alle Programmieraufgaben und Protokolle müssen pünktlich per E-Mail als Anhang an den jeweiligen Tutor geschickt werden. Aus dem Text der E-Mail muss hervorgehen, wer an der Bearbeitung der Aufgaben mitgewirkt hat. Die Theorieaufgaben sind abzugeben in das Fach des Tutors (Arnimallee 3, 1. OG). Außerdem können zusätzlich und freiwillig Ausdrucke der Dateien abgegeben werden, falls eine detaillierte Korrektur des Codes erwünscht ist. Beachten Sie ferner die Hinweise zur Bearbeitung der Programmieraufgaben auf der Homepage zur Vorlesung:
`http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2018/NumerikI.php`



Aufgabe 1 (Hermite-Interpolation, 4 TP)
Wir beobachten, wie ein Ball hinter einer Mauer von links nach rechts geworfen wird. Wir möchten uns ein Bild von der Flugbahn des Balles verschaffen und eine Schätzung für die maximal erreichte Höhe abgeben. Dabei wissen wir nur, wo der Ball hinter der Mauer verschwindet (Punkt A) und wieder auftaucht (Punkt B) und welche Steigung die Bahn in diesen Punkten hat.

Für die mathematische Modellierung des Problems wollen wir Interpolation verwenden. Die Koordinaten des Punktes A seien (x_A, h_A), die von B (x_B, h_B), die Eintritts- und Austrittssteigung seien s_A bzw. s_B. Gesucht ist ein Polynom p von geeignetem Grad, so dass $p(x_A) = h_A$, $p(x_B) = h_B$, $p'(x_A) = s_A$ und $p'(x_B) = s_B$. Es sei $x_A = 0$, $x_B = 1$, $h_A = 1$, $h_B = 2$, $s_A = 3.5$ und $s_B = -1$.

a) Wie sollte der Grad n von p gewählt werden, damit das Problem eindeutig lösbar ist?

b) Setzen Sie $p(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i\, x^i$ und stellen Sie ein lineares Gleichungssystem für den Koeffizientenvektor $c = (c_n, \ldots, c_0)^\top$ auf.

c) Berechnen Sie das Polynom p (z.B. mit `MATLAB`) und die Koordinaten (x_M, h_M) des Punktes, wo der Ball nach Ihrer Schätzung den höhsten Punkt erreicht hat.

Aufgabe 2 (Dividierte Differenzen, 2 TP)
Zeigen Sie für nicht notwendigerweise paarweise verschiedene Knoten $x_0, ..., x_n$, dass die dividierte Differenz $f[x_0, ..., x_n]$ unabhängig von der Reihenfolge der Knoten ist, d.h.

$$f[x_0, ..., x_n] = f[x_{i_0}, ..., x_{i_n}]$$

gilt für jede Permutation $i_0, ..., i_n$ der Indizes $(0, ..., n)$.

Aufgabe 3 (Polynominterpolation, 6 PP)

a) Implementieren Sie das Schema von Aitken-Neville in `MATLAB`. Schreiben Sie dazu eine Funktion der folgenden Form:

```
function v = AitkenNeville(x,y,u)
```

Der Vektor `x` enthält dabei die Stützstellen und der Vektor `y` die dazugehörigen Funktionswerte. Die Funktion soll den Wert `v` $= p($`u`$)$ des Interpolationspolynoms p an der Stelle `u` ausgeben.

b) Schreiben Sie ein Programm, welches eine als `m`-File gegebene Funktion f auf einem Intervall $I = [a, b]$ mittels äquidistanter Stützstellen und einem Polynom vom Grad n interpoliert. Das Programm soll eine `MATLAB`-Funktion von der Form

```
function [] = InterpolationAD(f,I,n)
```

sein und einen Plot des berechneten Interpolationspolynoms ausgeben. Verwenden Sie dabei die in Teil a) geschriebene Funktion `AitkenNeville`.

c) Schreiben Sie ein weiteres Programm analog zu `InterpolationAD`, welches eine Interpolation bezüglich der Tschebyscheff-Knoten durchführt. Dieses könnte zum Beispiel `InterpolationTscheby` heißen.

d) Testen Sie ihr Programm an den Funktionen

$$f_1(x) = e^{-x}, \quad f_2(x) = \arctan(x)$$

auf dem Intervall $[-5, 5]$. Verwenden Sie dazu zunächst n äquidistante Stützstellen, danach n Tschebyscheff-Knoten $(n = 5, 25, 125)$ und interpretieren Sie das Konvergenzverhalten.