Zuse Institute Berlin (ZIB)
Freie Universität Berlin
S. Röblitz, P. Koltai, S. Winkelmann, L. Fischer

Aufgabenblatt 7
Numerik I, SS 2018

Abgabe: 4. Juni 2018, 16:00 Uhr (Tutorenfach)

Allgemeine Hinweise: Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Alle Programmieraufgaben und Protokolle müssen pünktlich per E-Mail als Anhang an den jeweiligen Tutor geschickt werden. Aus dem Text der E-Mail muss hervorgehen, wer an der Bearbeitung der Aufgaben mitgewirkt hat. Die Theorieaufgaben sind abzugeben in das Fach des Tutors (Arnimallee 3, 1. OG). Außerdem können zusätzlich und freiwillig Ausdrucke der Dateien abgegeben werden, falls eine detaillierte Korrektur des Codes erwünscht ist. Beachten Sie ferner die Hinweise zur Bearbeitung der Programmieraufgaben auf der Homepage zur Vorlesung:

`http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2018/NumerikI.php`

Sie haben außerdem die Möglichkeit, beim Matlab-Tutorium am Freitag (10-12 Uhr, Raum 030, A6) Hilfestellung für die Programmieraufgaben zu bekommen.

Aufgabe 1 (Spline-Interpolation, 4 PP)
In der Vorlesung wurde der Algorithmus zur Berechnung kubischer Splines mit vollständigen Randbedingungen vorgestellt.

a) Implementieren Sie den Algorithmus in `MATLAB`.

b) Testen Sie Ihr Programm an der Funktion $f(x) = \sqrt{1.5 + x}$ auf dem Intervall $[a, b] = [-1, 1]$ mit äquidistanten Stützstellen. Berechnen Sie den Fehler zwischen $\phi_n(f) \in S^3_\Delta$ und f an der Stelle $x = -\frac{5}{16}\pi$ für $n = 4^i$, $i = 1, ..., 6$ und vergleichen Sie diesen Fehler mit der theoretische Fehlerschranke.

Hinweis: Für die dividierten Differenzen empfiehlt sich der `MATLAB`*-Operator* `diff` *zusammen mit der elementweisen Division „*`./`*". Mit dem Befehl*

```
find(y <= x(k+1) & y >= x(k))
```

lassen sich die Indizes $i_{k_1}, \ldots, i_{k_m}$ der m Elemente finden, für die $x_i \leq y_{i_{k_1}}, \ldots, y_{i_{k_m}} \leq x_{i+1}$ gilt. Um Rechenzeit zu sparen, bietet sich die Verwendung von sparse-Matrizen an.

Aufgabe 2 (Exaktheit der Quadraturformel, 2+2 TP)

a) Zu einer gegebenen stetigen Funktion $f \in C[-1, 1]$ betrachte man folgende Quadraturformel:
$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$
Zeigen Sie, dass diese Formel für Polynome vom Grad ≤ 3 exakt ist.

b) Zeigen Sie, dass es keine Quadraturformel mit $n+1$ Stützstellen geben kann, die alle Polynome vom Grad $2n+2$ exakt integriert. *Hinweis: Konstruieren Sie auf geschickte Weise ein spezielles Polynom vom Grad $2n+2$, für das eine beliebige Quadraturformel den Wert Null liefert.*

Aufgabe 3 (Quadratur über Hermite- und Spline-Interpolation, 3+1 TP)
Gegeben seien eine stetig differenzierbare Funktion $f \in C^1[a,b]$ sowie Stützstellen $x_i = a + ih$, $i = 0, ..., n$, wobei $h = (b-a)/n$.

a) Konstruieren Sie eine Quadraturformel für $\int_a^b f(x)\,dx$ basierend auf einer stückweisen Hermite-Interpolation. (D.h. pro Teilintervall $[x_i, x_{i+1}]$ wird ein Polynom dritten Grades unter Vorgabe von $f(x_i)$, $f'(x_i)$, $f(x_{i+1})$, $f'(x_{i+1})$ bestimmt und integriert.)

b) Konstruieren Sie eine Quadraturformel für $\int_a^b f(x)\,dx$ basierend auf vollständiger kubischer Spline-Interpolation. Was stellen Sie fest?