Zuse Institute Berlin (ZIB)
Freie Universität Berlin
S. Röblitz, P. Koltai, S. Winkelmann, L. Fischer

Aufgabenblatt 8
Numerik I, SS 2018

Abgabe: 11. Juni 2018, 16:00 Uhr (Tutorenfach)

Allgemeine Hinweise: Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Alle Programmieraufgaben und Protokolle müssen pünktlich per E-Mail als Anhang an den jeweiligen Tutor geschickt werden. Aus dem Text der E-Mail muss hervorgehen, wer an der Bearbeitung der Aufgaben mitgewirkt hat. Die Theorieaufgaben sind abzugeben in das Fach des Tutors (Arnimallee 3, 1. OG). Außerdem können zusätzlich und freiwillig Ausdrucke der Dateien abgegeben werden, falls eine detaillierte Korrektur des Codes erwünscht ist. Beachten Sie ferner die Hinweise zur Bearbeitung der Programmieraufgaben auf der Homepage zur Vorlesung:

`http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2018/NumerikI.php`

Sie haben außerdem die Möglichkeit, beim Matlab-Tutorium am Freitag (10-12 Uhr, Raum 030, A6) Hilfestellung für die Programmieraufgaben zu bekommen.

Aufgabe 1 (Summierte Trapez- und Simpsonregel, 4 PP)

a) Schreiben Sie Programme `trapez` und `simpson` zur numerischen Berechnung des Integrals
$$\int_a^b f(x)\,dx$$
einer Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mithilfe der summierten Trapez- bzw. Simpsonregel. Die Programme sollen von der Form

`y = trapez(fun,a,b,n)` bzw. `y = simpson(fun,a,b,n)`

sein unter Eingabe einer `MATLAB`-Funktion `fun` (zur Definition von f), Intervallgrenzen a, b sowie Anzahl der Teilintervalle n und Ausgabe des approximierten Integralwertes y. Testen Sie Ihr Verfahren anhand geeigneter Monome x^i auf dem Intervall $[0,1]$ auf Richtigkeit.

b) Testen Sie Ihre Programme anhand der Integrale
$$\int_{-2}^{2} e^x\,dx, \quad \int_{-9}^{9} \sqrt{|x|}\,dx.$$
Berechnen Sie dazu die Integrale analytisch und stellen Sie den Fehler in Abhängigkeit von n graphisch dar.

Aufgabe 2 (Gauß-Quadratur, 4 PP)

a) Implementieren Sie ein Verfahren zur summierten Gauß-Quadratur, indem Sie eine Funktion

`y = gauss_quad(f_handle,a,b,n,m)`

schreiben, der ein Funktionen-Handle `f_handle`, Intervallgrenzen `a`, `b`, der zu verwendende Polynomgrad `n` (mit `n` $\in \{1, ..., 4\}$) und die Anzahl der Teilintervalle `m` übergeben werden. Geben Sie in `y` das Ergebnis der Quadratur zurück. Testen Sie Ihr Verfahren anhand geeigneter Monome x^i auf dem Intervall $[0, 1]$ auf Richtigkeit.
Hinweis: Sie müssen die Gewichte und Stützstellen nicht selbst berechnen, sondern dürfen die Werte aus der Literatur verwenden.

b) Testen Sie Ihre Implementation an der Funktion $f(x) = \frac{2\ln\left(\frac{x}{2}+1\right)}{x^2+4}$ auf dem Intervall $[0, 2]$ für alle `n` $\in \{1, ..., 4\}$ und verschiedene Werte von `m`. Plotten Sie zu jedem `n` jeweils die Quadratur-Fehler bezüglich `m`. Verwenden Sie dabei eine doppelt logarithmische Darstellung, um die Konvergenzordnung abzulesen.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{\ln 2}{8}\pi$.

Aufgabe 3 (Gauß-Lobatto-Formeln, 4 TP)
Es sei $x_0 = \alpha$, $x_n = \beta$ und $n \geq 2$. Die Stützstellen $x_1, ..., x_{n-1}$ seien die Nullstellen eines Polynoms $p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}$ mit der Eigenschaft

$$(p_{n-1}, q)_\omega = 0 \quad \forall q \in \mathcal{P}_{n-2}$$

für $w(x) = (x-\alpha)(\beta - x)$, und $\mu_k = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta L_k(x)\,dx$ seien die zugehörigen Gewichte. Zeigen Sie, dass dann die resultierende Quadraturformel die Exaktheitsbedingung

$$\int_\alpha^\beta p(x)\,dx = (\beta - \alpha)\sum_{k=0}^{n} \mu_k p(x_k) \quad \forall p \in \mathcal{P}_{2n-1}.$$

erfüllt.