

Aufgabenblatt 9
Numerik I, SS 2018

Abgabe: 18. Juni 2018, 16:00 Uhr (Tutorenfach)

Allgemeine Hinweise: Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Alle Programmieraufgaben und Protokolle müssen pünktlich per E-Mail als Anhang an den jeweiligen Tutor geschickt werden. Aus dem Text der E-Mail muss hervorgehen, wer an der Bearbeitung der Aufgaben mitgewirkt hat. Die Theorieaufgaben sind abzugeben in das Fach des Tutors (Arnimallee 3, 1. OG). Außerdem können zusätzlich und freiwillig Ausdrucke der Dateien abgegeben werden, falls eine detaillierte Korrektur des Codes erwünscht ist. Beachten Sie ferner die Hinweise zur Bearbeitung der Programmieraufgaben auf der Homepage zur Vorlesung:

`http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2018/NumerikI.php`

Sie haben außerdem die Möglichkeit, beim Matlab-Tutorium am Freitag (10-12 Uhr, Raum 030, A6) Hilfestellung für die Programmieraufgaben zu bekommen.

Aufgabe 1 (Extrapolation der Trapezregel, 4 TP)

Zeigen Sie, dass die Extrapolation der summierten Trapezregel für die Gitterweiten $0 < h_n < \dots < h_0$ für Polynome bis zum Grad $2n + 1$ exakt ist.

Hinweis: Denken Sie an die asymptotische Fehlerentwicklung.

Aufgabe 2 (Romberg-Quadratur, 4 TP)

- Jedes Element T_{jk} im Extrapolationstableau der extrapolierten Trapezregel (siehe Seite 80 im Skript) lässt sich als Ergebnis einer Quadraturformel auffassen. Bestimmen Sie j, k so, dass T_{jk} bei Verwendung der Romberg-Folge gleich dem durch Anwendung der Simpsonregel erhaltenen Wert ist.
- Finden Sie Werte $a, b \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $f \in C[a, b]$, für die das Integral $\int_a^b f(x) dx$ besser durch die Trapezregel als durch die Simpsonregel approximiert wird.

Aufgabe 3 (Romberg-Quadratur, 4 PP)

- Implementieren Sie eine Romberg-Quadratur mittels extrapolierte Trapezregel zur Berechnung des Integrals

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1 + (\gamma x)^2} dx = \frac{2}{\gamma} \arctan(\gamma).$$

Wählen Sie dazu die Schrittweiten $h_0 = 1$ und $h_j = 2^{-j}h_0$, $j = 0, \dots, n$. Für die Werte $\gamma = 1$ und $\gamma = 500$ sowie $n = 0, \dots, 12$ bestimmen Sie jeweils mittels Extrapolation in h_j^2 und Auswertung bei 0 den Wert E_{h_n} der extrapolierten Trapezregel.

- b) Berechnen Sie zum Vergleich auch die einfache summierte Trapezregel T_{h_n} jeweils für die feinste Schrittweite h_n .
- c) Stellen Sie die Fehler von E_{h_n} und T_{h_n} in Abhängigkeit von n dar und interpretieren Sie die Ergebnisse.