Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Xingjian Zhang-Schneider

2. Übung zur Vorlesung

Computerorientierte Mathematik II

SoSe 2019

`http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2019/CoMaII.php`

Abgabe: Fr., 03. Mai 2019, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (Bonuspunkte: 2TP)
Es seien p, q zwei Polynome von der Gestalt

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \text{ und } q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m .$$

Es gelte überall $p(x) = q(x)$, wobei $a_n \neq 0$ und $b_m \neq 0$ seien. Zeigen Sie, dass dann $n = m$ ist und dass für sämtliche Koeffizienten $a_k = b_k$ gilt.

2. Aufgabe (Bonuspunkte: 0TP+2PP+2PP+2PP)

a) Sei $x_0 < x_2 < \cdots < x_n$ mit $x_i \in \mathbb{R}$ ein Satz von $n+1$ paarweise verschiedenen Stützstellen und $p_f \in \mathcal{P}^n$ das Interpolationspolynom von f mit Grad höchstens n und $p_f(x_i) = f(x_i)$ für $i = 0, \ldots, n$. Zeigen Sie, daß die so genannte Vandermondematrix $A \in \mathbb{R}^{n+1 \times n+1}$ mit $A_{ij} = x_{i-1}^{j-1}$ invertierbar ist und

$$p_f(x) = \sum_{i=0}^{n} p_{i+1} x^i$$

mit $p = A^{-1} f(x_{i-1})_{i=1,\ldots,n+1}$ gilt.

b) Schreiben Sie ein `matlab`-Programm `p=monomialcoefficients(xi,f)`, das zu einer gegebenen Funktion `f` und einem Stützstellenvektor `xi` den Koeffizientenvektor `p` der Interpolierten bezüglich der Monombasis berechnet. Schreiben Sie ferner ein `matlab`-Programm `y=monomialinterpolation(x,p)`, welches das Interpolationspolynom zum Koeffizientenvektor `p` an den Stellen `x` auswertet.

c) Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} x^i$. Wie lautet der exakte Koeffizientenvektor? Testen Sie Ihr Programm indem Sie für diese Funktion und n uniform verteilte Stützstellen auf $[0, 1]$ mit $n = 1, \ldots, 200$ den Fehler der berechneten Koeffizientenvektoren in der Maximumsnorm über n plotten. Was beobachten Sie? Untersuchen Sie die Kondition der Vandermondematrix (Hinweis: `cond, condest`).

d) Testen Sie Ihr Programm für `f=@sin` und n uniform verteilte Stützstellen auf $[0, \pi]$ mit $n = 1, \dots, 200$ indem Sie $\max |p_f(x_i) - f(x_i)|$ über n plotten. Plotten Sie außerdem die Funktion und die Interpolationspolynome für $n = 10, 20, 40, 80$.

   Schreiben Sie ein `matlab`-Programm `y=lagrangeinterpolation(x,p,xi)` welches das Interpolationspolynom mit den Koeffizientenvektor `p` bezüglich der Lagrange-polynome zum Stützstellenvektor `xi` an den Stellen `x` auswertet und wiederholen Sie die Testläufe dieser Teilaufgabe mit diesem Programm.

   Was beobachten Sie?

3. Aufgabe (Bonuspunkte: 2TP+2TP)
Seien die Stützstellen $x = (x_1, \dots, x_n)$ gegeben durch $0 \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n < 1$. Die Lagrange-Polynome bezüglich den Stützstellen x sind dann gegeben durch

$$L_k(\xi) = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{\xi - x_i}{x_k - x_i}, \quad k = 0, \dots, n. \tag{1}$$

a) Zeigen Sie oder widerlegen Sie, dass die Lagrange-Polynome eine Basis des Polynomraums

$$P_n = \{v \in C[a,b] \mid v(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,\ a_k \in \mathbb{R}\} \tag{2}$$

   darstellen.

b) Zeigen Sie oder widerlegen Sie, dass die Lagrange-Polynome die Zerlegung der Eins

$$\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

   erfüllen.

Allgemeine Hinweise

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben. Die Lösungen der Programmieraufgaben sollen per E-Mail an den jeweiligen Tutor geschickt werden. Eine vollständige Lösung besteht aus dokumentiertem, lauffähigem Matlab-Code und Matlab-Skripten names run_x_y.m, die die erforderlichen Testläufe aus Aufgabe y des Übungszettels x ohne Angabe von Argumenten durchführen. Bitte fügen Sie auch Protokolle der Testläufe bei. Die Abgabe korrekter, lauffähiger Lösungen wird als Täuschungsversuch bewertet, wenn die Funktionsweise des Codes auf Nachfrage nicht erklärt werden kann.