Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Xingjian Zhang-Schneider

4. Übung zur Vorlesung

# Computerorientierte Mathematik II

SoSe 2019

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2019/CoMaII.php

**Abgabe: Fr., 17. Mai 2019, 12:00 Uhr**

**1. Aufgabe** (4 TP)
Sei $f \in C^\infty([a,b])$ derartig, dass ein $c \in \mathbb{R}$ existiert mit $\|f^{(k)}\|_\infty \leq c$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Weiter sei zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Liste paarweise verschiedener Stützstellen $(x_{ni})_{i \in \{0,\dots,n\}}$ gegeben. Bezeichne mit $p_n \in \mathcal{P}_n$ das Interpolationspolynom, das $p_n(x_{ni}) = f(x_{ni})$ für $i \in \{0,\dots,n\}$ erfüllt. Beweisen Sie

$$\|f - p_n\|_\infty \in \mathcal{O}\left(e^{-n}\right) \text{ für } n \to \infty.$$

**Hinweis:** Sie dürfen ohne Beweis die für alle $k \in \mathbb{N}$ gültige Abschätzung $k! \geq \sqrt{2\pi k}(\frac{k}{e})^k$ verwenden.

**2. Aufgabe** (3 PP + 3 PP + 3PP + 3PP)
Im Folgenden möchten wir das Fehlerverhalten von Interpolationspolynomen auf dem Intervall $[a,b] = [-5,5]$ für $n \to \infty$ numerisch untersuchen. Für $f \in C([a,b])$ approximieren wir hierfür die Maximumsnorm $\|f\|_\infty$ durch die *diskrete Maximumsnorm* (mit 1001 gleichverteilten Stützstellen)

$$\|f\|_h := \max_{i \in \{0,\dots,1000\}} \left| f\left(a + \frac{i(b-a)}{1000}\right) \right|.$$

Zu $n \in \mathbb{N}$ werden wir neben *äquidistanten Stützstellen*

$$x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}, \text{ für } i \in \{0,\dots,n\}$$

auch *Tschebyschow-Stützstellen*

$$y_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot \cos\left(\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi\right), \text{ für } i \in \{0,\dots,n\}$$

verwenden.

a) Sei $f(x) = \sin(x)$. Untersuchen Sie durch numerische Experimente den Interpolationsfehler $\|f - p_n\|_h$ für $n \to \infty$ sowohl unter Verwendung äquidistanter Stützstellen als auch unter Verwendung von Tschebyschow-Stützstellen.

b) Sei $f(x) = (1+x^2)^{-1}$. Untersuchen Sie durch numerische Experimente den Interpolationsfehler $\|f - p_n\|_h$ für $n \to \infty$ sowohl unter Verwendung äquidistanter Stützstellen als auch unter Verwendung von Tschebyschow-Stützstellen.

c) Seien $f_1(x) = \operatorname{sign}(x) \cdot x^2$ und $f_2(x) = \operatorname{sign}(x) \cdot x^3$. Untersuchen Sie durch numerische Experimente die Interpolationsfehler $\|f_i - p_n\|_h$ für $n \to \infty$ sowohl unter Verwendung von äquidistanter als auch von Tschebyschow-Stützstellen. Was beobachten Sie für äquidistante Stützstellen? Man beobachtet in dem Fall von Tschebyshow-Stützstellen für $\|f_i - p_n\|_h \in \mathcal{O}(n^{c_i})$. Was sind die Werte der $c_i$?

d) Ferner sei wieder $f(x) = \sin(x)$. Interpolieren Sie diese Funktion sowohl unter Verwendung äquidistanter Stützstellen als auch unter Verwendung von Tschebyschow-Stützstellen auf dem Intervall $[-1, 1]$. Untersuchen Sie durch numerische Experimente den Interpolationsfehler auf dem Intervall $[-5, 5]$. Beschreiben und Erklären Sie was Sie beobachten.

Beschreiben Sie jeweils Ihre Beobachtungen und erklären Sie diese. Gehen Sie insbesondere auf Kondition, Stabilität, bekannte Fehlerabschätzungen und Konvergenzgeschwindigkeit ein. Fügen Sie Ihren Ausführungen geeignete Plots bei.

**Hinweise:**

- Natürlich können Sie am Computer nicht „$n \to \infty$“ betrachten. Für die obigen Beispiele ist im Groben das Intervall $n \in \{1, \dots, 100\}$ angemessen. Sie können aber natürlich auch ein anderes Intervall wählen, wenn sich dieses – beispielsweise durch Ihre Implementation bedingt – für Ihre Beobachtungen besser eignet.
- Sie dürfen Sich aussuchen, wie Sie die Interpolation genau durchführen. Es bietet sich die Interpolation mit Newton-Polynomen von Blatt 2 an, sie können aber auch die Lagrange-Interpolation von Blatt 1 verwenden. Sie bekommen bis zu 2 Bonuspunkte, wenn Sie in Ihren Betrachtungen beide Interpolationsarten verwenden und ggf. auf Unterschiede eingehen und diese begründen.
- Bevor Sie mit dem Aufschreiben beginnen, sollten Sie Ihre Implementation sicherheitshalber auf Plausibilität prüfen, beispielsweise indem Sie auch Funktionenplots von $f$ und $p_n$ für kleine $n$ anfertigen.

## Allgemeine Hinweise

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.

Die Lösungen der Programmieraufgaben sollen per E-Mail an den jeweiligen Tutor geschickt werden. Eine vollständige Lösung besteht aus dokumentiertem, lauffähigem Matlab-Code und Matlab-Skripten names run_x_y.m, die die erforderlichen Testläufe aus Aufgabe y des Übungszettels x ohne Angabe von Argumenten durchführen. Bitte fügen Sie auch Protokolle der Testläufe bei. Die Abgabe korrekter, lauffähiger Lösungen wird als Täuschungsversuch bewertet, wenn die Funktionsweise des Codes auf Nachfrage nicht erklärt werden kann.