Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Xingjian Zhang-Schneider

5. Übung zur Vorlesung

Computerorientierte Mathematik II

SoSe 2019

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2019/CoMaII.php

Abgabe: Fr., 24. Mai 2019, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (2 TP)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben mit der Eigenschaft

$$|f''(x)| \leq M, \quad \forall x \in [x_0, x_1], \tag{1}$$

wobei x_0, $x_1 \in \mathbb{R}$. Ferner sei

$$p_1 \in P_1 = \left\{ v \in C[a,b] \mid v(x) = \sum_{k=0}^{1} a_k x^k,\ a_k \in \mathbb{R} \right\} \tag{2}$$

das dazugehörige Interpolationspolynom. Zeigen Sie die folgende Abschätzung:

$$|f(x) - p_1(x)| \leq \frac{1}{8} M h^2, \tag{3}$$

wobei $h = x_1 - x_0$.

Hinweis: Schätzen Sie zuerst die Funktion ab:

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_1} |(x - x_0)(x - x_1)|. \tag{4}$$

2. Aufgabe (2 TP + 2 TP)

a) Zeigen Sie, daß die Newton-Côtes-Formeln für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ symmetrisch sind.

b) Zeigen Sie, daß die Gewichte λ_k der Newton-Côtes-Formeln die Gleichung

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k = 1, \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

erfüllen.

3. Aufgabe (3 TP)

a) Bestimmen Sie die relative Kondition des Integrationsoperators

$$I : C[a,b] \ni f \mapsto \int_a^b f(x)\, dx \in \mathbb{R}$$

bezüglich der Maximumsnorm auf $C[a,b]$. Kann die relative Kondition beliebig schlecht werden?

b) Wie verhalten sich die absolute und relative Kondition der Integration von $\sin((2n+1)x)$ auf dem Intervall $[0,\pi]$ für $n \to \infty$?

c) Berechnen Sie mit der Matlab-Funktion `quad` das Integral für $n = 1, \ldots, 20$ und die Toleranz 10^{-13} und Plotten Sie den relativen Fehler über n (`semilogy`). Was beobachten Sie? Ist die Funktion `quad` eine gute Wahl, gibt es eine bessere?

4. Aufgabe (3 PP + 3 PP)
Wir wollen versuchen, das Integral

$$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$$

numerisch zu approximieren. Dazu unterteilen wir das Intervall $[0,1]$ äquidistant in n Teilintervalle mit den Grenzen $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ und berechnen die sogenannte *Riemann-Summe*

$$\int_0^1 f(x)\, dx \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

mit $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Schreiben Sie ein `matlab`-Programm `riemann(I,f,n,q)`, das diese Riemann-Summe berechnet. Dabei bezeichnet der Vektor `I` das Integrationsintervall, `f` die Funktion, `n` die Anzahl der Teilintervalle und $0 \leq$ `q` ≤ 1 einen Wert, der durch $\xi_k = x_{k-1} + \mathtt{q}(x_k - x_{k-1})$ die Lage des Wertes ξ_k festlegt.
Berechnen Sie nun für $n = 1, \ldots, 500$ den Fehler der Riemann-Summe, und plotten Sie diesen Fehler in einer logarithmischen Skala gegen n. Werten Sie dazu einmal die Funktion an den Anfangspunkten der Teilintervalle aus (d.h. `q` $= 0$), ein anderes Mal an deren Mittelpunkten (d.h. `q` $= 0.5$). Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse. Was beobachten Sie?
Tip: Für die Berechnung des Fehlers können Sie `0.5*erf(1)*sqrt(pi)` als Vergleichswert heranziehen.

Zur Abgabe der Programme: Packen Sie die Dateien `riemann.m`, `example.m` und `riemann_error.png` in ein ZIP-Archiv und benennen Sie dieses mit dem ZEDAT-Accountnamen eines Ihrer Gruppenmitglieder. Schicken Sie das Archiv samt einer Liste aller Gruppenmitglieder per Email an Ihren zuständigen Tutor. Achten Sie bei den Dateinamen bitte auch auf Groß- und Kleinschreibung.

Allgemeine Hinweise

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.