

6. Übung zur Vorlesung

COMPUTERORIENTIERTE MATHEMATIK II

SoSe 2019

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2019/CoMaII.php

Abgabe: Fr., 31. Mai 2019, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (4 TP)

Die n -te Newton-Côtes-Quadraturformel ist so konstruiert, daß sie für Polynome $p \in P_n$ exakt ist. Zeigen Sie, daß für gerades n sogar Polynome vom Grade $n+1$ exakt integriert werden.

2. Aufgabe (3 TP + 3 TP)

Sei $f \in C([a, b])$ gegeben. Wir möchten $I(f) := \int_a^b f(x) dx$ mit Hilfe einer Quadraturformel $I_1(f)$ approximieren, die von einer Gitterweite h abhängt. Um den Fehler $e := |I(f) - I_1(f)|$ abschätzen zu können, verwenden wir eine zweite Quadraturformel $I_2(f)$ und den Fehlerschätzer $\tilde{e} := |I_1(f) - I_2(f)|$.

Wir machen die folgenden Annahmen:

- Die Formel I_1 hat höchstens Ordnung $p_1 > 0$, es gilt also für ein $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\alpha h^{p_1} \leq |I(f) - I_1(f)|.$$

- Die Formel I_2 hat mindestens Ordnung $p_2 > p_1$, es gilt also für ein $\beta \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\beta h^{p_2} \geq |I(f) - I_2(f)|.$$

Zeigen Sie:

- a) Mit der Effizienzspanne $c := \frac{\beta}{\alpha}$ sowie mit $q := p_2 - p_1$ gilt

$$\frac{\tilde{e}}{1 + ch^q} \leq e \leq \frac{\tilde{e}}{1 - ch^q}.$$

- b) Es gilt

$$\frac{|e - \tilde{e}|}{e} \in \mathcal{O}(h^q) \text{ für } h \rightarrow 0.$$

3. Aufgabe (2 PP + 2 PP + 2 PP)

Wir möchten die summierten Newton–Côtes-Formeln implementieren und deren Fehler-Verhalten untersuchen.

- a) Schreiben Sie eine Funktion `[S,A] = summed_newton_cotes(a,b,f,k,n)`, die die Newton–Côtes-Formel $S_n^{(k)}$ implementiert. Dabei bestimmen `a` und `b` das Integrationsintervall, `f` sei die zu integrierende Funktion und `n` die Anzahl der Intervalle, auf denen die k -te Newton–Côtes-Formel (mit $k \in \{1, 2, 6\}$) angewendet wird. In der Variablen `S` werde hierbei der Wert der Quadraturformel zurückgegeben und in `A` die Anzahl der durchgeführten `f`-Auswertungen.

Hinweis: Sie können die entsprechenden Quadraturgewichte dem Vorlesungsskript entnehmen.

- b) Wir möchten die Approximation des Integrals $I := \int_0^\pi \sin(x) dx$ untersuchen. Erstellen Sie hierzu für die Funktion $f(x) = \sin(x)$ und für das Intervall $[a, b] = [0, \pi]$
- eine Abbildung, in der die Fehlerkurven $|I - S_n^{(k)}|$ für $k \in \{1, 2, 6\}$ doppelt logarithmisch gegen $n \in \{1, \dots, 1000\}$ geplottet werden,
 - und eine Abbildung, in der die Anzahl der `f`-Auswertungen über den Quadraturfehler $|I - S_n^{(k)}|$ für $k \in \{1, 2, 6\}$ doppelt logarithmisch als Punkt-Plot dargestellt wird.

Kommentieren Sie Ihre Ergebnisse insbesondere vor dem Hintergrund der unterschiedlichen Ordnung der Verfahren und der Glattheit von f .

- c) Verfahren sie analog für $f(x) = \sqrt{x} + \sin(21\pi x)$ auf dem Intervall $[0, 1]$.

Hinweis: Es gilt $\int_0^\pi \sin(x) dx = 2$ und $\int_0^1 \sqrt{x} + \sin(21\pi x) dx = \frac{2}{21} (7 + \frac{1}{\pi})$.

Zur Abgabe der Programme: Packen Sie die Datei `summed_newton_cotes.m`, Ihr Skript zum Erzeugen der Abbildungen sowie die von Ihnen erstellten Bilddateien in ein ZIP-Archiv und benennen Sie dieses mit dem ZEDAT-Accountnamen eines Ihrer Gruppenmitglieder. Schicken Sie das Archiv samt einer Liste aller Gruppenmitglieder per Email an Ihren zuständigen Tutor. Achten Sie bei den Dateinamen bitte auch auf Groß- und Kleinschreibung.

ALLGEMEINE HINWEISE

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.