Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Xingjian Zhang-Schneider

9. Übung zur Vorlesung

Computerorientierte Mathematik II

SoSe 2019

`http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2019/CoMaII.php`

Abgabe: Fr., 21. Juni 2019, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (3 TP)
Zu $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f \in C([0,\infty))$ betrachten wir das Anfangswertproblem

$$x'(t) = \lambda x(t) + f(t), \qquad x(0) = x_0. \tag{AWP}$$

Zeigen Sie, dass die Iterierten des impliziten Euler-Verfahrens aus der Vorlesung zum Nähern der Lösung von (AWP) genau dann eindeutig definiert sind, wenn $\tau \neq \frac{1}{\lambda}$ gilt, wobei $\tau > 0$ die Zeit-Schrittweite bezeichnet. Insbesondere ist das implizite Euler-Verfahren für (AWP) und $\lambda < 0$ also für beliebige Schrittweiten wohldefiniert.

2. Aufgabe (4 TP)
Zur Differentialgleichung

$$x'(t) = \lambda x(t)\,, \qquad 0 < t \leq T$$

für $\lambda > 0$ seien x_k und $\tilde{x}_k$ die mit dem impliziten Euler-Verfahren gewonnenen Näherungslösungen zu den Anfangswerten x_0 bzw. $\tilde{x}_0$. Zeigen Sie, daß unter der Schrittweitenbeschränkung $\tau < \frac{1}{\lambda}$ die folgende Abschätzung für die diskrete Kondition des impliziten Euler-Verfahrens gilt:

$$|x_k - \tilde{x}_k| \leq e^{\frac{T\lambda}{1-\tau\lambda}} |x_0 - \tilde{x}_0|.$$

3. Aufgabe (6 PP)
Wir möchten Anfangswertprobleme der Form

$$x'(t) = \lambda x(t) + f(t), \qquad x(0) = x_0 \tag{AWP}$$

in MATLAB numerisch lösen.

a) Implementieren Sie eine Funktion `x = explicitEuler(lambda, f, x0, T, n)` die das Problem (AWP) näherungsweise mittels des expliziten Euler-Verfahrens aus der Vorlesung löst und den Vektor aller Iterierten als $\mathtt{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$ (inklusive Startwert) zurückgibt. Hierbei sei die Zeit-Schrittweite durch $\tau := \frac{T}{n}$ definiert.

b) Implementieren Sie analog eine Funktion `x = implicitEuler(lambda, f, x0, T, n)` die (AWP) mit dem impliziten Euler-Verfahren aus der Vorlesung löst und als Ergebnis die Iterierten $\mathtt{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$ zurückgibt.

c) Wir betrachten nun die konkrete Wahl $\lambda = 16$, $f(t) = t$, $T = 8$ und $x_0 = 1$. Lösen Sie das Anfangswertproblem (AWP) jeweils mit dem expliziten und mit dem impliziten Euler-Verfahren für $n = 60$ und für $n = 120$. Plotten Sie Ihre Lösungen jeweils mit einer geeigneten Skalierung; die Skalierung muss dabei *nicht* für alle Plots übereinstimmen! Was beobachten Sie und wie erklären Sie sich dieses Verhalten?

Hinweis: Zum Vergleich dürfen Sie ohne Beweis verwenden, dass die analytische Lösung des Problems durch $x(t) = \frac{257}{256}e^{16t} - \frac{t}{16} - \frac{1}{256}$ gegeben ist.

Zur Abgabe der Programme: Packen Sie `explicitEuler.m`, `implicitEuler.m`, Ihr Skript zum Erzeugen der Abbildungen sowie die von Ihnen erstellten Abbildungen in ein ZIP-Archiv und benennen Sie dieses mit dem ZEDAT- Accountnamen eines Ihrer Gruppenmitglieder. Schicken Sie das Archiv samt einer Liste aller Gruppenmitglieder per Email an Ihren zuständigen Tutor. Ihre Beobachtungen und Interpretationen können Sie wahlweise mit Ihren Programmen oder mit Ihren Theorieaufgaben abgeben. Achten Sie bei den Dateinamen bitte auch auf Groß- und Kleinschreibung.

Allgemeine Hinweise

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.