Kreuzen Sie an, ob die jeweiligen Aussagen „wahr“ oder „falsch“ sind.

wahr	falsch	Aussage
		Sei $\phi(x) = \frac{1}{4}x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \phi(x_k)$ für jeden Startwert $x_0 \in [0, 1]$ gegen einen Fixpunkt von ϕ.
		Zu je zwei Vektoren $a,\ b \in \mathbb{R}^n$ gibt es eine Householder-Reflexion Q, so dass $Qa = b$ ist.
		Sei $a < b$ und $\Delta = \{x_k = a + kh \mid k = 0, \ldots, n\}$ ein äquidistantes Gitter zur Schrittweite $h = (b-a)/n$. Dann stimmt für alle $f \in C[a, b]$ die Interpolation $f_n \in S_n = \{v \in C[a, b] \mid v\vert_{[x_{k-1},x_k]}$ affin linear, $k = 1, \ldots, n\}$ von f in $x_k \in \Delta$ mit der Bestapproximation von f aus S_n bezüglich der L^2-Norm überein.
		Die Funktion $f(x) = \alpha x + \beta$, $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, ist eine kubische Spline-Funktion.
		Jedes autonome Anfangswertproblem erster Ordnung ist reversibel.
		Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f'(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ und $x^* = 0$ die eindeutig bestimmte Nullstelle von f auf $\mathbb{R}$. Dann konvergiert das Newton-Verfahren für alle Startwerte $x_0 \in \mathbb{R}$ gegen $x^* = 0$.
		Gauß’sche Quadraturformeln sind von positivem Typ.
		Bei vorgegebener Genauigkeit und Anwendung summierter Newton-Côtes-Formeln führt die sukzessive adaptive Verfeinerung der Teilintervalle immer zu einem geringeren Aufwand als die uniforme Verfeinerung.
		Es bezeichne $\mathcal{P}_n$ die Menge der Polynome höchstens n-ten Grades. Dann hat die Hermite-Interpolationsaufgabe $p \in \mathcal{P}_n :\quad p_k^{(i)}(0) = i,\ \ i = 0, \ldots, n$, eine eindeutig bestimmte Lösung.
		Das Butcher-Schema $\begin{array}{c\|cccc} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$ definiert ein explizites Runge-Kutta-Verfahren der Konsistenzordnung $p = 3$.

Aufgabe 1 (3+2+2 Punkte)

a) Sei $\Delta = \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1\}$ ein Gitter auf $[0,1]$. Dann ist

$$V = \{v \in C[0,1] \mid v|_{[x_{k-1},x_k]} \in C^1[x_{k-1},x_k] \ \forall k = 1,\dots,n \text{ und } \ v(0) = v(1) = 0\}$$

ein Prähilbertraum mit dem Skalarprodukt $(v,w) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} v'(x)w'(x)\,dx$ und

$$U = \{v \in V \mid v|_{[x_{k-1},x_k]} \text{ ist linear } \forall k = 1,\dots,n\} \subset V.$$

Zeigen Sie, dass für jedes $f \in V$ die Lösung u_n der Interpolationsaufgabe

$$u_n \in U: \quad u_n(x_k) = f(x_k), \quad k = 0,\dots n,$$

mit der Bestapproximation von f aus U übereinstimmt.

b) Sei H ein Prähilbertraum, U ein endlichdimensionaler Unterraum von H, $P : H \to U$ die Orthogonalprojektion von H auf U und $f \in H$. Zeigen Sie, dass Pf die Bestapproximation von f aus U ist.

c) Auf dem Vektorraum der $n \times n$-Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ sei das Skalarprodukt

$$(A,B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ij}$$

von $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, und $B = (B_{ij})_{i,j=1}^n$ definiert. Berechnen Sie im Sinne dieses Skalarprodukts die Bestapproximation von $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ aus dem Unterraum

$$U = \{V = (v_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n,n} \mid v_{ij} = 0 \text{ für } i \neq j\}.$$

Aufgabe 2 (2+2 Punkte)

Wir betrachten die Romberg-Quadratur zur Approximation des Integrals $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x$ mit der summierten Trapezregel zu den Schrittweiten $h_j = 2^{-j}h_0$, $j = 0,\dots n$, und $h_0 = \frac{1}{2}$.

a) Führen Sie mit Hilfe des Aitken-Neville Tableaus die Romberg-Quadratur für $f(x) = 64x^5$ und $n = 2$ durch.

b) Berechnen Sie für $f(x) = \frac{x^6}{6!}$ und $n = 1$ eine obere Schranke (eine Zahl!) für den Diskretisierungsfehler. Hinweis: Satz 4.12 aus der Vorlesung.

Aufgabe 3 (1+2 Punkte)

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t)),\ t \in (0,T], \qquad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}. \qquad \text{(AWP)}$$

a) Zeigen Sie, dass (AWP) mit $f(t,x) = 10t + \sin^2(x) - x$ für alle $T > 0$ eine eindeutige Lösung hat.

b) Welche Konsistenzordnung hat das implizite Runge-Kutta-Verfahren

$$\psi^\tau x = x + \tau(\tfrac{1}{4}f(x) + \tfrac{1}{2}f(x + \tfrac{\tau}{2}f(x)) + \tfrac{1}{4}f(\psi^\tau x))?$$

Aufgabe 4 (2+1+3 Punkte)
Gegeben ist folgende unvollständige MATLAB-Implementation zur Berechnung kubischer Splines mit vollständigen Randbedingungen zu einem Gitter $\{x_0, \ldots, x_n \mid a = x_0 < \ldots < x_n = b\}$:

```
1  function taylor_coeff = spline_coeff(x, f, df)
2  % Input:
3  %   x              Gitterknoten (x_0, ... x_n)
4  %   f              Handle der zu interpolierenden Funktion.
5  %  df              Handle zur ersten Ableitung von f.
6  % Output:
7  %   taylor_coeff   (4-mal-n) Taylor-Koeffizienten-Matrix.
8  
9  % Hilfsfunktion für Summen adjazenter Werte (Analogon zu diff).
10 msum = @(h) movsum(h, 2, 'Endpoints', 'discard');
11 
12 % Bereite Variablen vor
13 n    = length(x)-1;  % Anzahl der Intervalle
14 h    = diff(x);      % Intervallbreiten, R^n
15 hSum = msum(h);      % Intervallbreitensummen, R^(n-1)
16 fx   = f(x);         % Funktionsauswertungen, R^(n+1)
17 
18 % Bestimme dividierte Differenzen erster Ordnung, R^(n+2)
19 f_div1 = zeros(1, n+2); % TODO: implementier mich!
20 % Bestimme dividierte Differenzen zweiter Ordnung, R^(n+1)
21 f_div2 = diff(f_div1) ./ [h(1); hSum; h(n)];
22 
23 % Aufstellen des linearen Systems zur Berechnung der s''(x_k).
24 lambda = [1; h(2:n) ./ hSum ];  % obere Nebendiagonale, R^n
25 mu     = [h(1:n-1) ./ hSum; 1]; % untere Nebendiagonale, R^n
26 rhs    = 6 * f_div2;            % rechte Seite, R^(n+1)
27 % Berechne den Vektor der s''(x_k), R^(n+1)
28 c = thomas_algorithmus(mu, 2*ones(n+1,1), lambda, rhs);
29 
30 taylor_coeff        = zeros(4,n);
31 taylor_coeff(1,:)   = 0; % TODO: Implementier mich: Koeff. a
32 taylor_coeff(2,:)   = 0; % TODO: Implementier mich: Koeff. b
33 taylor_coeff(3,:)   = 0; % TODO: Implementier mich: Koeff. c
34 taylor_coeff(4,:)   = 0; % TODO: Implementier mich: Koeff. d
35 end
```

a) Geben Sie eine mögliche Implementation für Zeile 19 an.

b) Begründen Sie die Wahl des Thomas-Algorithmus zur Berechnung von c in Zeile 28.

c) Geben Sie eine mögliche Implementation für die Berechnung der Ausgabe in den Zeilen 31-34 an.