Kreuzen Sie an, ob die jeweiligen Aussagen „wahr“ oder „falsch“ sind. Für jede richtig angekreuzte Aussage erhalten Sie einen Punkt.

wahr	falsch	Aussage
		Sei $U \subset V$ ein endlichdimensionaler Unterraum eines Banach-Raums V und $f \in V$. Dann ist die Bestapproximation $u \in U$ von f eindeutig bestimmt.
		Sei H ein Prähilbertraum und $Q \neq 0$ eine Projektion. Dann ist Q genau dann eine Orthogonalprojektion, wenn $\|Q\| = 1$ gilt.
		Zu jeder Funktion $f \in C[a,b]$ gibt es eine Folge von Polynomen p_k, $k = 1, 2, \ldots$, höchstens n-ten Grades mit der Eigenschaft $\max_{x\in[a,b]} \lvert f(x) - p_k(x)\rvert \to 0$ für $k \to \infty$.
		Es sei $\phi(x) = 1 - \frac{1}{2}x$ und $x_{k+1} = \phi(x_k)$, $k = 0, \ldots$, mit $x_0 = 1$. Dann gilt $x_k \to \frac{2}{3}$ für $k \to \infty$.
		Eine kubische Splinefunktion zum Gitter $\Delta = \{x_0, \ldots, x_n \mid a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$ ist dreimal stetig differenzierbar auf (a, b).
		Wir betrachten das Anfangswertproblem $x'(t) = \sin(x(t))$, $t > 0$ und $x(0) = 0$. Dann genügt die Lösung $\tilde{x}$ zum gestörten Startwert $\tilde{x}(0) = e^{-1}$ der Abschätzung $\lvert x(1) - \tilde{x}(1)\rvert \leq 1$.
		Summierte Newton-Côtes-Quadraturformeln sind von positivem Typ.
		Es existiert ein implizites Runge-Kutta-Verfahren 4. Stufe mit Konsistenzordnung $p = 5$.
		Es sei $N \in \mathbb{N}$, $h_N = 1/N$, $x_i = ih_N$, $i = 1, \ldots N$, und $I_N(f) = \sum_{i=1}^{N} f(x_i)h_N$ eine Quadraturformel zur Approximation von $I(f) = \int_0^1 f(x)\,dx$. Dann folgt $\lvert I(f) - I_M(f)\rvert \leq \lvert I(f) - I_N(f)\rvert$ aus $N \leq M$.
		Die absolute diskrete Kondition der Quadratur mit Gauß-Formeln auf dem Intervall $[a, b]$ beträgt $b - a$.

Aufgabe 1 (2 + 1 Punkte)

a) Es seien $v, w \in \mathbb{R}^n$ und $\|v\|_2 = \|w\|_2 \neq 0$. Bestimmen Sie eine Orthogonalmatrix $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit der Eigenschaft $Qv = w$. Gibt es noch mindestens eine andere Orthogonalmatrix mit dieser Eigenschaft?

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ und es gelte $Ax = b$. Zeigen Sie, dass x eine Lösung des folgenden Ausgleichsproblems ist

$$x \in \mathbb{R}^n : \qquad \|b - Ax\|_2^2 \leq \|b - Ay\|_2^2 \qquad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

Unter welcher Bedingung ist diese Lösung eindeutig bestimmt?

Aufgabe 2 (1+2+2 Punkte)

Gegeben ist das Gitter $\Delta = \{x_k = k + 1 \mid k = 0, 1, 2\}$ und die Funktionswerte $f(x_k) = k$, $k = 0, 1, 2$.

a) Geben Sie zu diesen Werten zwei verschiedene interpolierende, kubische Splines an.

b) Berechnen Sie Koeffizienten und rechte Seite des Gleichungssystems zur Bestimmung der zweiten Ableitungen $s_2''(x_k)$, $k = 0, 1, 2$, des vollständigen, interpolierenden, kubischen Splines aus den obigen Funktionswerten und den Randwerten $f'(x_0) = f'(x_2) = 0$.

c) Berechnen Sie diese Lösung der Hermite-Interpolationsaufgabe

$$p \in \mathcal{P}_4 : \quad \begin{array}{rcll} p(x_k) & = & f(x_k) = k - 1, & \quad i = 0, 1, 2 \\ p'(x_k) & = & f'(x_k) = 0, & \quad i = 0, 2 \end{array} .$$

Aufgabe 3 (2+2 Punkte)

Wir betrachten den zentralen Differenzenquotienten zweiter Ordnung

$$D(h) = \frac{f(x + h) - 2f(x) + f(x - h)}{h^2}$$

zur Approximation der zweiten Ableitung $f''(x)$ einer fest gewählten Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ an einer fest gewählten Stelle $x \in \mathbb{R}$ für verschiedene Schrittweiten $h > 0$. Durch Polynom-Extrapolation

$$p_n \in \mathcal{P}_n : \qquad p_n(h_k) = D(h_k), \quad k = 0, \ldots, n,$$

von $h_k = (k+2)^{-1}$, $k = 0, \ldots, n$, auf $h = 0$ soll eine verbesserte Approximation $p_n(0)$ von $f''(x)$ berechnet werden.

a) Zeigen Sie eine asymptotische Entwicklung der Form

$$D(h) = f''(x) + \sum_{k=1}^{n+1} \tau_k h^{2k} + r_{n+2}(h) h^{2(n+2)}, \quad h > 0,$$

und geben Sie die Koeffizienten τ_k an.
Hinweis: Verwenden Sie die Taylor-Entwicklungen von $f(x + h)$ und $f(x - h)$ um x.

b) Beweisen Sie die Fehlerabschätzung

$$|f''(x) - p_n(0)| \leq c \max_{k=2,3} \left\{ \max_{|h| \in [0,1/2]} |f^{2(n+k)}(x + h)| \right\} 2^{-2(n+1)}$$

mit einer Konstanten c, die nicht von f abhängt.

Aufgabe 4 (2 + 2 + 1 Punkte)
Wir betrachten das implizite Euler-Verfahren

$$x_{k+1} = x_k + \tau f(x_{k+1}), \quad x_0 = x(0), \qquad k = 1, \dots \tag{1}$$

mit Schrittweite $\tau > 0$ zur Approximation der Lösung des Anfangswertproblems $x'(t) = f(x(t))$ mit gegebenem Startwert $x(0) \in \mathbb{R}$.

a) Wenn man die Lösung x_{k+1} der nichtlinearen Gleichung (1) durch einen einzigen Newton-Schritt mit Startwert x_k ersetzt, erhält man das sogenannte linear-implizite Euler-Verfahren. Geben Sie den entsprechenden diskreten Flussoperator an.

b) Zeigen Sie,dass das linear-implizite Euler-Verfahren die Konsistenzordnung $p = 1$ hat.

c) Mit welchem bekannten Verfahren stimmt es im Falle $f(x) = \lambda x$ überein?

Aufgabe 5 (2+1+2 Punkte)
Gegeben ist das folgende (schlecht dokumentierte) MATLAB-Skript.

```
function [x, t] = unbenanntesSkript(lambda, x0, I, tau)

  % vorbereiten
  f = @(x) lambda*x;
  t = I(1):tau:I(2);
  x = zeros(size(t));
  x(1) = x0;

  % berechnen
  for i=2:length(x)

    k_1 = f(x(i-1));
    k_2 = f(x(i-1) + tau * k_1 / 2);
    k_3 = f(x(i-1) + tau * k_2 / 2);
    k_4 = f(x(i-1) + tau * k_3);
    x(i) = x(i-1) + tau * (k_1 + 2*k_2 + 2*k_3 + k_4)/6;

  end

end
```

a) Was wird durch dieses MATLAB-Skript berechnet?

b) Welche Rolle spielt die Schleife mit Laufindex `i`?

c) Erweitern Sie das Skript so, dass es zusätzlich das Ergebnis des impliziten Euler-Verfahrens angewendet auf das Anfangswertproblems $x' = \lambda x$ mit Anfangswert x_0 plottet.