Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Ralf Kornhuber, Max Kahnt

0. Übung zur Vorlesung

Numerik I

SoSe 2019

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2019/NumerikI.php

Abgabe: Di., 23. April 2019, 16:00 Uhr
Hinweis: Dieser Übungszettel bietet ausschließlich Bonuspunkte. Aufgrund der Osterfeiertage erfolgt die Abgabe ausnahmsweise am Dienstag nach dem regulären Abgabetermin.

1. Bonusaufgabe (4 TP)
Sei die Abbildung $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit Fixpunkt $x^* \in \mathbb{R}$ und $|\phi'(x^*)| \neq 1$. Zeigen Sie, dass dann mindestens eine der Iterationsvorschriften

a) $x_{k+1} := \phi(x_k)$,

b) $x_{k+1} := \phi^{-1}(x_k)$

für Startwerte aus einer geeigneten offenen, nichtleeren Umgebung um x^* eine wohldefinierte Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschreibt, die gegen x^* konvergiert.

2. Bonusaufgabe *(Schrankensatz)* (4 TP)
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, offene und konvexe Menge sowie $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Existiere weiter $c \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\sup_{x\in U} \|Df(x)\| \leq c$. Zeigen Sie, dass f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante c ist.

Hinweis: Mit $\|Df(x)\|$ ist die Matrix-Operatornorm von $Df(x)$ gemeint, die durch die euklidische Norm $\|\cdot\|_2$ induziert wird. Das heißt, es ist

$$\|Df(x)\| := \max_{y\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Df(x)y\|_2}{\|y\|_2}.$$

Darüber hinaus dürfen Sie ohne Beweis die Ungleichung

$$\left\| \int_a^b F(t)\,\mathrm{d}t \right\|_2 \leq \int_a^b \|F(t)\|_2\,\mathrm{d}t$$

für integrierbare Abbildungen $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ verwenden.

3. Bonusaufgabe (4 PP)
Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, dessen Nullstelle $F(x^*) = 0$ numerisch mit Hilfe eine iterativen Lösers bestimmt werden soll. Implementieren Sie das (ungedämpfte, skalare) Newtonverfahren und bestimmen Sie die ersten 7 Iterierten $(x_1, \dots, x_7)$ für folgende Fälle

a) $F(x) = \arctan(x), x_0 = 1.3,$

b) $F(x) = \arctan(x), x_0 = 1.4,$

c) $F(x) = -\cos(x), x_0 = 1.4$ und

d) $F(x) = mx + n, x_0 = 1.4, m = 10, n = 0.$

Beschreiben Sie das beobachtete Konvergenzverhalten für alle obigen Fälle und wie dies für Teil d von m und n abhängt.

Allgemeine Hinweise

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.