Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Ralf Kornhuber, Max Kahnt

1. Übung zur Vorlesung

Numerik I

SoSe 2019

`http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2019/NumerikI.php`

Abgabe: Fr., 26. April 2019, 16:00 Uhr

1. Aufgabe (4 TP)
Gegeben sei der normierte Vektorraum $V = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, der Unterraum $U = \{u = (u_1, u_2) \in V : u_1 - u_2 = 0\}$ sowie $f = (2, 4) \in V$.

a) Formulieren Sie die entsprechende Bestapproximationsaufgabe. Ist sie lösbar? Ist eine etwaige Lösung eindeutig?

b) Geben Sie die zur Bestapproximationsaufgabe äquivalente Normalengleichung an.

c) Laut Skript läßt sich die Bestapproximationsaufgabe $p \in U$ über eine orthogonale Projektion P charakterisieren. Wie lautet der Zusammenhang? Geben Sie die Projektion P explizit an und berechnen Sie damit die Bestapproximation $p \in U$ an $f = (2, 4)$.

2. Aufgabe (4 TP)
Sei X ein normierter Vektorraum.

a) Beweisen Sie die *Parallelogrammidentität*: X ist genau dann ein Prähilbertraum, wenn
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall\, x, y \in X \ .$$

Hinweis: Sie dürfen die sogenannte *Polarisationsformel* verwenden, d.h. dass das passende Skalarprodukt gegeben ist durch $4(x, y) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2$. Erwägen Sie für die Linearität separat die Additivität und die Homogenität zu zeigen. Dafür kann es hilfreich sein zuerst $(x + \delta x, y) + (x - \delta x, y) = 2(x, y)$ zu zeigen. Daraus kann auch ein Spezialfall für die Homogenität abgeleitet werden, der bis auf die rationalen Zahlen ausgedehnt werden kann. Um die Aussage für reelle Zahlen zu zeigen, dürfen Sie die Stetigkeit der Norm ohne Beweis verwenden.

b) Zeigen Sie: Ein Prähilbertraum ist strikt konvex.

3. Bonusaufgabe (4 PP)
Gegeben ist eine stetig differenzierbare Funktion $N : X \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ durch

$$N(x,t) = \sum_{i=1}^{n} w_{o,i}\, a\left(\sum_{j=1}^{d} w_{ij} t_j - v_i\right) - v_o, \quad w = (w_{ij}), v = (v_i), w_o = (w_{o,i})$$

mit $X = \mathbb{R}^{n\times d} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \ni x = (w, v, w_o, v_o)$, sowie $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a(s) = \max(s^3, 0)$. [1]

a) Implementieren Sie eine `matlab`-Funktion zur numerischen Auswertung von N.

Sei $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(t) = N(x^*, t)$$

mit $x^* = (w^*, v^*, w_o^*, v_o^*) \in Z$ und $T = \{(t^{(i)}, F(t^{(i)}))\}_{i=1,\ldots,I}, I \in \mathbb{N}$. [2]

b) Verwenden Sie die im `matlab`-Skript *parameter.m* gegebenen Werte für x^* und erzeugen Sie T aus den im selben Skript gegebenen Stellen $\{t^{(i)}\}_{i=1,\ldots,I}$ für $n = 3, d = 2, I = 100$.

Wir betrachten das nichtlineare Ausgleichsproblem

$$x \in X : \quad \sum_{i=1}^{I} \left(F(t^{(i)}) - N(x, t^{(i)})\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{I} \left(F(t^{(i)}) - N(y, t^{(i)})\right)^2 \quad \forall y \in X. \qquad (1)$$

c) Versuchen Sie das Ausgleichsproblem (1) mittels der `matlab`-Routine *lsqnonlin* für die im Skript gegebenen Startwerte zu lösen. Interpretieren Sie die Ergebnisse.

Allgemeine Hinweise

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.

[1] Die Funktion N kann als einfaches *künstliches neuronales Netz* aufgefasst werden, genauer als einschichtiges feedforward-Netz mit n künstlichen Neuronen, Gewichten w, Schwellenwerten v und Aktivierungsfunktion a. Die Komponenten des Vektors w_o heißen Ausgabegewichte und v_o nennt man Verschiebung.

[2] Im NN-Sprech auch *Trainingsmenge* genannt.