

2. Übung zur Vorlesung

NUMERIK I

SoSe 2019

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2019/NumerikI.php

Abgabe: Fr., 3. Mai 2019, 16:00 Uhr

1. Aufgabe (4 TP)

Sei V ein Prähilbertraum und U ein endlichdimensionaler Unterraum. Die Bestapproximationsaufgabe

$$u \in U : \|u - f\| \leq \|v - f\| \quad \forall v \in U \quad (1)$$

hat bekanntermaßen eine eindeutige Lösung. Sei $P : V \rightarrow U$, $f \mapsto P(f) = u$ löst (1).

- Zeigen Sie, dass P eine Orthogonalprojektion ist.
- Berechnen Sie die absolute und die relative Kondition κ_{abs} und κ_{rel} von (1) und kommentieren Sie die Ergebnisse.

2. Aufgabe (4 TP)

Berechnen Sie die Orthogonalpolynome vom Grad 0, 1 und 2 bzgl. des gewichteten Skalarproduktes

$$(u, v) := \int w(x) u(x) v(x) dx$$

und der Gewichtsfunktion $w(x) = -\ln x$ auf dem Intervall $[0, 1]$. Verwenden Sie dazu das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren ausgehend von $\{1, x, x^2\}$.

Hinweis: Berechnen Sie zunächst

$$\int_0^1 \ln x \cdot x^k dx \quad .$$

3. Aufgabe (4 PP)

Betrachten Sie den Raum $C([- \pi, \pi])$ mit Norm $\|\cdot\|_2$. Es bezeichne

$$S_h = \{u_h \in C([- \pi, \pi]) \mid u_h \text{ ist linear auf } [jh - \pi, (j+1)h - \pi], j = 0, \dots, n-1\} .$$

den Raum der linearen finiten Elemente zu dem äquidistanten Gitter mit Schrittweite $h = 2\pi/n$.

- a) Implementieren Sie den *Thomas-Algorithmus*¹ zur effizienten Lösung von linearen Gleichungssystemen in Tridiagonalgestalt in `matlab`.
- b) Bestimmen Sie die Bestapproximationen zu $\sin(x)$ aus dem Raum der linearen finiten Elemente S_h , indem Sie das nach Wahl der Knotenbasis resultierende lineare Gleichungssystem mittels Ihrer Implementation aus Aufgabenteil a für $n = 2^i, i = 1, \dots, 10$, lösen.
- c) Berechnen Sie die L^2 -Fehler der FE-Bestapproximation in Abhängigkeit von n und visualisieren Sie sie in einem `log log`-Plot. Beschreiben und erklären Sie die beobachtete Entwicklung des Fehlers mit zunehmender Verfeinerung des gewählten Gitters.

Hinweis: Die Massenmatrix wurde in der Vorlesung angegeben. Zum Aufstellen der rechten Seite dürfen Sie die `matlab`-Funktion *integral* verwenden.

ALLGEMEINE HINWEISE

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.

¹wird im Tutorium erklärt