Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Ralf Kornhuber, Max Kahnt

3. Übung zur Vorlesung

Numerik I

SoSe 2019

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2019/NumerikI.php

Abgabe: Fr., 10. Mai 2019, 16:00 Uhr

1. Aufgabe (4 TP)
Sei $V = C[-1,1]$, $f(x) = x^4$ und $U = \mathcal{P}_3$. Berechnen Sie die Tschebyscheff- und die L^2-Approximation von f in U. Ermitteln Sie den Fehler der beiden Approximationen in der Supremums- sowie der L^2-Norm.

2. Aufgabe (4 TP)
Sei $Q\binom{R}{0} = A \in \mathbb{R}^{m\times n}, m \geq n$ eine Matrix mit vollem Spaltenrang und entsprechender QR-Zerlegung. $\lambda_{\max}(A^TA)$ bezeichne den größten Eigenwert der quadratischen Matrix A^TA. Zeigen Sie:

a) $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)}$,

b) $\kappa_2(A) = \kappa_2(R)$.

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass A^TA mittels einer Orthogonaltransformation diagonalisiert werden kann.

3. Aufgabe (4 TP)
Zum Gitter

$$X_k = \{x_{k,j} = j2^{-k} \mid j = 0,\ldots,2^k\}, \quad k \geq 0$$

betrachten wir den Raum der stückweise konstanten Funktionen (Treppenfunktionen)

$$T_k = \{f : [0,1) \to \mathbb{R} \mid f_{|[x_{k,j},x_{k,j+1})} \text{ ist konstant für } j = 0,\ldots,2^k-1\}$$

sowie die rekursiv definierte Menge der Blockimpulse

$$\begin{aligned} B_0 &= \{\phi_{0,0}\}, \\ B_n &= B_{n-1} \cup \{\phi_{n,l} \mid l = 0,\ldots,2^{n-1}-1\} \text{ für } n \geq 1, \\ \phi_{n,l}(x) &= \chi_{[x_{n,2l},x_{n,2l+1})}(x), \end{aligned}$$

wobei χ die Indikatorfunktion

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in A, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

bezeichne. Sei, wie aus der Vorlesung bekannt,

$$\begin{aligned} H_n &= \{\phi\} \cup \{\psi_{k,j} \mid j \leq 2^k - 1, 0 \leq k < n\} \subset T_n, \\ \psi_{k,j}(x) &= 2^{k/2}\psi(2^k x - j), \\ \psi(x) &= \chi_{[0,0.5)}(x) - \chi_{[0.5,1)}. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass B_n eine (hierarchische) Basis von T_n ist.

b) Konstruieren Sie H_2 aus B_2 mittels Gram-Schmidt-Orthonormalisierung. Geben Sie allgemein an, wie H_n aus B_n mittels Gram-Schmidt-Orthonormalisierung erzeugt werden kann für $n \geq 0$ und berechnen Sie damit beispielhaft $\psi_{2,2}$.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $\{\chi_{[x_{k,j}, x_{k,j+1})} \mid j = 0, \ldots, 2^k - 1\}$ eine Basis von T_k ist.

4. Aufgabe (4 PP)
Betrachten Sie den Raum $C([0,1))$ mit Norm $\|\cdot\|_2$. Es bezeichne

$$T_n = \{f : [0,1) \to \mathbb{R} \mid f_{|[x_{n,j}, x_{n,j+1})} \text{ ist konstant für } j = 0, \ldots, 2^n - 1\}$$

den Raum der stückweise konstanten Funktionen (Treppenfunktionen) mit Gitterweite $h = 2^{-n}$, wobei $x_{n,j} = j2^{-n}$.

a) Bestimmen Sie numerisch die Bestapproximationen zu $\sin(1.5\pi x + 0.5) + 1$ aus dem Raum T_n als Linearkombination der Haar-Wavelet-Basis H_n in `matlab` für $n = 0, \ldots, 9$.

b) Berechnen Sie die L^2-Fehler der FE-Bestapproximation in Abhängigkeit von n und visualisieren Sie sie in einem log log-Plot. Beschreiben und kommentieren Sie die beobachtete Entwicklung des Fehlers mit zunehmender Verfeinerung des gewählten Gitters.

Hinweis: Zum Berechnen der Koeffizienten dürfen Sie die `matlab`-Funktion *integral* verwenden.

Allgemeine Hinweise

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.