

6. Übung zur Vorlesung

NUMERIK I

SoSe 2019

[http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS\\_2019/NumerikI.php](http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2019/NumerikI.php)

**Abgabe: Fr., 31. Mai 2019, 16:00 Uhr**

**1. Aufgabe** (4 TP)

Es sei  $S_{\Delta, \text{nat}}^3$  der Raum aller kubischen Splinefunktionen mit natürlichen Randbedingungen zu den Stützstellen  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$  und  $x_2 = 2$ .

- a) Welche der folgenden Funktionen sind aus  $S_{\Delta, \text{nat}}^3$ ?
- i)  $f(x) = x^3 - x^2$
  - ii)  $f(x) = x^2(x - 6) - (x - 2)^3$
  - iii)  $f(x) = \max\{0, (x - 1)^3\} - \frac{1}{2}x^3$
- b) Bestimmen Sie den interpolierenden Spline  $s_2 \in S_{\Delta, \text{nat}}^3$  zu  $f(x) = x^3$ . Wie lautet das Ergebnis, wenn die natürlichen Randbedingungen durch  $s_2''(x_0) = f''(x_0)$ ,  $s_2''(x_2) = f''(x_2)$  ersetzt werden?

**2. Aufgabe** (4 TP)

Zeigen Sie: Es existiert genau eine Lösung  $s_n \in S_{\Delta}^3$  der Interpolationsaufgabe

$$s_n \in S_{\Delta}^3 : s_n(x_k) = f(x_k) \quad \forall k = 0, \dots, n$$

mit

- a) natürlichen Randbedingungen:  $s_n''(a) = s_n''(b) = 0$ ;
- b) periodischen Randbedingungen:  $s_n'(a) = s_n'(b)$ ,  $s_n''(a) = s_n''(b)$ .

**3. Aufgabe** (6 PP)

In der Vorlesung wurde der Algorithmus zur Berechnung kubischer Splines mit vollständigen Randbedingungen vorgestellt.

- a) Implementieren Sie den Algorithmus in `matlab` ohne Rekursion für die stückweisen Polynomkoeffizienten.
- Hinweis:** Zur Berechnung der dividierten Differenzen können Sie die Funktion `diff` in `matlab` verwenden.
- b) Testen Sie Ihr Programm an der Funktion  $f(x) = \sin(10x)$  auf dem Intervall  $I = [-1, 1]$  mit äquidistanten Knoten in Abständen 0.4, 0.2 und 0.1 und plotten Sie die Ergebnisse.
- c) Berechnen Sie den Fehler zwischen  $\phi_n(f) \in \mathcal{S}_\Delta^3$  und  $f$  an der Stelle  $x = 0.2$  für  $n = 2^i$ ,  $i = 1, \dots, 10$  und vergleichen Sie diesen Fehler mit der theoretischen Fehlerschranke.
- d) Optional: Begründen Sie Ihre Wahl des Algorithmus zur Lösung des bei der Spline-Interpolation entstehenden Gleichungssystems in Bezug auf Aufwand, Stabilität und Speichereffizienz.

#### ALLGEMEINE HINWEISE

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.