Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Ralf Kornhuber, Max Kahnt

7. Übung zur Vorlesung

Numerik I

SoSe 2019

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2019/NumerikI.php

Abgabe: Fr., 07. Juni 2019, 16:00 Uhr

1. Aufgabe (4 TP)
Beweisen Sie Satz 4.8 im Skript.

2. Aufgabe (4 TP)
Ähnlich wie im eindimensionalen Fall kann man in höheren Dimensionen Quadraturformeln gewinnen. Um eine Quadraturformel für die Integration auf Rechtecken zu gewinnen, verfahre man wie folgt:

a) Überlegen Sie sich, wie die lineare Interpolation bzgl. der Eckpunkte auf einem rechtwinkligen Dreieck mit den Ecken $e_1 = (0, 0)$, $e_2 = (a, 0)$, $e_3 = (0, b)$ aussieht.

b) Gewinnen Sie eine Quadraturformel für das Dreieck durch Integration der entsprechenden linearen Lagrange–Polynome L_k, die in 2–D analog zu ihren Verwandten in 1–D definiert sind, nämlich: $L_k(e_i) = \delta_{ki}$.

c) Leiten Sie hiervon die gesuchte Quadraturformel für ein Rechteck ab.

3. Aufgabe (6 PP)

a) Die Verwendung der Gauß-Legendre-Quadratur (Gauß-Christoffel mit $\omega = 1$) auf einzelnen Teilintervallen ergibt die Quadraturformel aus Lemma 4.3. Die zur Auswertung notwendigen Nullstellen der Legendre-Polynome p_{n+1} sind:

   - für $n = 0$: 0
   - für $n = 1$: $\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$
   - für $n = 2$: 0, $\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$
   - für $n = 3$: $\pm\sqrt{\frac{15\pm2\sqrt{30}}{35}}$

   Berechnen Sie die zugehörigen Gewichte.

b) Schreiben Sie ein `MATLAB`-Programm `function int = gaussLegendreQuad(f,n,I,m)`, das den Wert `int` des Intergrals über die Funktion `f` auf dem Intervall `I` = [a,b] unter Verwendung der summierten Gauß-Legendre-Quadratur vom Grad `n` bei Unterteilung von `I` in `m` Teilintervalle berechnet.
Testen Sie ihr Programm, indem Sie für $m = 1, 2, 4, 8$ und $n = 0, 1, 2, 3$ die Integrale

$$S_1 = \int_0^1 \frac{(2\gamma+1)\pi}{2} \sin((2\gamma+1)\pi x))dx \quad S_2 = \int_{-1}^1 \frac{\gamma}{2\arctan(\gamma)} \frac{1}{1+(\gamma x)^2} dx$$

für $\gamma = 1$ und $\gamma = 10$ berechnen. Interpretieren Sie die Ergebnisse.

Allgemeine Hinweise

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.