Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Ralf Kornhuber, Max Kahnt

8. Übung zur Vorlesung

Numerik I

SoSe 2019

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2019/NumerikI.php

Abgabe: Fr., 14. Juni 2019, 16:00 Uhr

1. Aufgabe (4 TP)
Als Verfahren $D(h)$ zur Berechnung der Ableitung $f'(x)$ sei der symmetrische Differenzenquotient

$$D(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

gegeben. Bestimmen Sie die asymptotische Entwicklung des Fehlers in h.

2. Aufgabe (4 TP)
Führen Sie mit Hilfe des Aitken-Neville Tableaus eine Romberg-Quadratur ausgehend von der summierten Trapezregel für das Integral

$$\int_0^1 t^5 dt$$

bei Benutzung der Schrittweiten $h_0 = 1$, $h_1 = 0.5$ und $h_2 = 0.25$ durch.

3. Aufgabe (4 TP)
Jedes Element T_{jk} im Extrapolationstableau der extrapolierten Trapezregel lässt sich als Ergebnis einer Quadraturformel auffassen. Zeigen Sie, dass bei Verwendung der Romberg-Folge gilt:

a) T_{11} entspricht der summierten Simpson-Regel, T_{22} entspricht der summierten Milneregel.

b) T_{jk}, $j > k$, erhält man durch Anwendung der zu T_{kk} gehörigen Quadraturformel auf das $(j-k)$-mal halbierte Ausgangsintervall.

c) Für jede zu T_{jk} gehörige Quadraturformel

$$\sum_{l=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{2^j} \mu_{kl,ij} f(z_{l,ij})$$

mit $z_{l,ij} = z_l + ih_j$, $z_l = a + l(b-a)/m$ sind die Gewichte $\mu_{kl,ij}$ positiv.

Hinweis: Zeigen Sie für die zu T_{kk} gehörigen Gewichte $\mu_{kl,ik}$:

$$\max_i \mu_{kl,ik} \leq 4^k \cdot \min_i \mu_{kl,ik}$$

.

4. Aufgabe (4 PP)

a) Schreiben Sie eine `matlab`-Funktion mit der Signatur

`v = romberg_extrapolation(f, h0, n, p)`,

die zu einer Funktion f an den durch die ersten n Glieder der Romberg-Folge gegebenen Stützstellen mit $h_0 = 1$ die Extrapolation in 0 mittels eines Polynoms in h^p berechnet. Testen Sie die Funktion, indem Sie den Fehler der Extrapolation in 0 über $n = 0, \ldots, 10$ mit geeigneter Achsenskalierung für $p = 1, \ldots, 4$ und

i) $f_1(x) = \mathrm{sinc}(x)$,

ii) $f_2(x) = 6x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

plotten. Interpretieren Sie die Ergebnisse.

b) Schreiben Sie eine `matlab`-Funktion, die es erlaubt obige Extrapolation auf die summierte Trapezregel im Intervall I anzuwenden und damit die klassische Romberg-Quadratur für eine Funktion g liefert. Testen Sie Ihre Implementation, indem Sie mit geeigneten Parametern die Integrale für

i) $g_1 = \frac{\gamma}{2\arctan(\gamma)} \frac{1}{1+(\gamma x)^2}$ auf $I_1 = [-1, 1]$,

ii) $g_2 = \frac{(2\gamma+1)\pi}{2} \sin((2\gamma + 1)\pi x))$ auf $I_2 = [0, 1]$

mit jeweils $\gamma = 1, 100$ approximieren. Begründen Sie Ihre Wahl der Parameter und interpretieren Sie die Ergebnisse.

Allgemeine Hinweise

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.