Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Ralf Kornhuber, Max Kahnt

9. Übung zur Vorlesung

Numerik I

SoSe 2019

`http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2019/NumerikI.php`

Abgabe: Fr., 21. Juni 2019, 16:00 Uhr

1. Aufgabe (4 TP)

Die Saturationsbedingung für Simpson-Regel $S_{V_k^{(j)}}$ und Trapez-Regel $T_{V_k^{(j)}}$ zur Approximation des Integrals $I_{V_k^{(j)}}$ einer Funktion f über einem Intervall $V_k^{(j)} = [z_{k-1}^{(j)}, z_k^{(j)}]$ ist erfüllt, wenn ein $q \in [0, 1)$ existiert mit

$$|I_{V_k^{(j)}}(f) - S_{V_k^{(j)}}(f)| \leq q|I_{V_k^{(j)}}(f) - T_{V_k^{(j)}}(f)|.$$

a) Geben Sie ein Beispiel an, für das die Saturationsbedingung nicht erfüllt ist.

b) Geben Sie ein Beispiel an, für das die Saturationsbedingung mit $q \in \mathcal{O}(h^2)$ und $h = \operatorname{diam}(V_k^{(j)})$ erfüllt ist.

2. Aufgabe (8 PP)

a) Implementieren ein Verfahren zur adaptiven Mehrgitter-Quadratur mit Hilfe der Trapez- bzw. Simpson-Regel.

Genauer, schreiben Sie eine Funktion

```
y = multigrid_quad( f_handle, a, b, n, Nmax, tol ),
```

wobei `f_handle` ein Funktionen-Handle der zu integrierenden Funktion, `a` bzw. `b` die untere bzw. obere Integrationsgrenze, n die Anzahl der zu Beginn gegebenen äquidistanten Intervalle, `Nmax` die maximal zulässige Anzahl an Intervallen und `tol` die für das Abbruchkriterium verwendete Toleranz beschreibt.

Nehmen Sie die Saturationsbedingung für die übergebene Funktion an. Berechnen Sie zum Gitter Δ_j im j-ten Schritt des Verfahrens für alle Teilintervalle $I_{k,j}$ lokale a posteriori Fehlerschätzungen $e_{I_{k,j}}(f)$ des Diskretisierungsfehlers in $I_{k,j}$ mit der Simpson-Regel.

Brechen Sie das Verfahren ab, sobald die Anzahl an Intervallen den Wert `Nmax` überschreitet oder der geschätzte globale Fehler $e_{\Delta_j}(f) = \sum_k e_{I_{k,j}}(f)$ die Genauigkeitsbedingung $|e_{\Delta_j}(f)| \leq \frac{1}{2}\texttt{tol}$ erfüllt. Andernfalls verfeinern Sie diejenigen Intervalle $I_{k,j}$ mit maximalem $|e_{I_{k,j}}(f)|$, indem Sie deren Mittelpunkte zu Δ_j hinzufügen um Δ_{j+1} zu erhalten.

b) Testen Sie Ihre Implementation anhand der Integrale

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{-1}^1 \frac{1}{1+(\gamma x)^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{2}{\gamma}\arctan(\gamma)$$

mit $\gamma = 1, 10, 100, 500$. Wählen Sie $n = 10$, $N_{\max} = 1000$ und $\mathrm{tol} = 10^{-10}$. Plotten Sie anschließend den exakten Fehler gegen die Anzahl der verwendeten Stützstellen unter Verwendung einer geeigneten logarithmischen Skalierung. Plotten Sie zum Vergleich jeweils auch den exakten Fehler der summierten Trapez-Regel mit uniformem Gitter und gleicher Anzahl an Quadraturpunkten. Was beobachten Sie?

Allgemeine Hinweise

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.