Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Ralf Kornhuber, Max Kahnt

10. Übung zur Vorlesung

Numerik I

SoSe 2019

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2019/NumerikI.php

Abgabe: Fr., 28. Juni 2019, 16:00 Uhr

1. Aufgabe (4 TP)
Gegeben sei das AWP in $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$

$$\dddot{x} - t\ddot{x} - t^2\dot{x} - x - t^2 = 0, \quad t > 0$$

mit passenden Anfangswerten in $t_0 = 0$. Formulieren Sie ein äquivalentes autonomes Anfangswertproblem erster Ordnung. Diskutieren Sie Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung dieses Systems.

2. Aufgabe (4 TP)

a) Zeigen oder widerlegen Sie die Reversibilität der Anfangswertprobleme

$$x'(t) = px(t), \tag{AWP1}$$
$$x'(t) = px(t) - kx^2(t) \tag{AWP2}$$

für $x : (t_0, t_1] \to \mathbb{R}$, $x(t_0) = x_0$ mit $t_0, t_1, p, k \in \mathbb{R}$.

b) Sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$ Lipschitz-stetig. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$x'(t) = f(x(t)), \quad t \in (0, 1], \quad x(0) = x_0,$$

reversibel ist.

3. Aufgabe (6 TP)
Stellen Sie sich vor, Sie sitzen in einer vollen Badewanne mit V_0 Litern Inhalt. Die Wassertemperatur Θ_0 ist Ihnen zu niedrig. Darum drehen Sie den Wasserhahn auf und lassen f Liter/Sekunde Wasser der Temperatur $\Theta_1 > \Theta_0$ einlaufen. Da die Wanne voll ist, läuft die gleiche Menge Wasser zum Überlauf hinaus. Durch geeignete Maßnahmen gelingt es Ihnen dass heiße Wasser schnell zu verteilen (Durchmischungshypothese).

a) Verifizieren Sie analog zu den in der Vorlesung gegebenen Einführungsbeispielen, dass das Anfangswertproblem

$$\Theta'(t) = \frac{f}{V_0}(\Theta_1 - \Theta(t)), \quad \Theta(0) = \Theta_0,$$

die zeitliche Entwicklung der Wassertemperatur $\Theta(t)$ beschreibt.

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem.

c) Zeigen Sie, dass die obige Differentialgleichung die stationäre Lösung

$$\Theta_{\text{stat}}(t) = \Theta_1$$

besitzt.

d) Zeigen Sie, dass für jedes Θ_0 gilt

$$\lim_{t\to\infty} \Theta(t) = \Theta_1.$$

e) Wie lange müssen Sie im Falle $V_0 = 150l$, $\Theta_0 = 30°C$, $f = 0.1l/s$ und $\Theta_1 = 60°C$ warten bis $38°C$ erreicht sind?

4. Bonusaufgabe (4 TP)

Beweisen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes die folgende Aussage:
Sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ Lipschitz-stetig. Dann existiert für jedes genügend kleine $T > 0$ und jedes $x_0 \in \mathbb{R}^d$ eine eindeutig bestimmte Lösung $x \in C^1([0,T])$ des Anfangswertproblems

$$x'(t) = f(x(t)), \quad t \in (0,T], \quad x(0) = x_0.$$

Allgemeine Hinweise

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.