Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Ralf Kornhuber, Max Kahnt

11. Übung zur Vorlesung

Numerik I

SoSe 2019

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2019/NumerikI.php

Abgabe: Fr., 05. Juli 2019, 16:00 Uhr

1. Aufgabe (4 TP)
Betrachten Sie die beiden linearen Anfangswertprobleme

$$\dot{y} = py - ky^2, \qquad y(0) = y_0, \qquad p, k > 0 \tag{1}$$
$$m\ddot{x}(t) = -Dx(t), \qquad x(0) = x_0, x'(0) = v_0, \qquad m, D > 0. \tag{2}$$

Berechnen Sie für diese beiden Probleme jeweils die Wronski-Matrix $W(t)$ und damit eine Abschätzung der punktweisen Kondition $\kappa(t)$ in der $\|\cdot\|_1$-Norm. Stellen Sie ferner die zur Wronski-Matrix gehörige Differentialgleichung auf und zeigen Sie, dass $W(t)$ eine Lösung derselben ist.

Hinweis: Benutzen Sie $y(t) = \frac{y_0 p e^{tp}}{p - ky_0(1-e^{tp})}$.

2. Aufgabe (4 TP)
Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} q' \\ p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p \\ q \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass die Evolution ϕ^t von (3) die *Hamiltonfunktion*

$$H(q,p) = \frac{1}{2}(q^2 + p^2)$$

erhält, dass also für alle $t \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$H(\phi^t x) = H(x) \ .$$

Zeigen Sie außerdem, dass das explizite Eulerverfahren H *nicht* erhält.

3. Aufgabe (4 TP)
Entwickeln Sie mit Hilfe der Taylor-Methode ein Verfahren 4-ter Ordnung zur Approximation von

$$\dot{x} = x^2, \qquad x(0) = x_0. \tag{4}$$

4. Aufgabe (6 PP)
Schreiben Sie ein `MATLAB`-Programm `function [x, t, c] = RungeKuttaEx(f, x0, I, tau, b, A)`, das ein explizites Runge-Kutta-Verfahren, welches durch `b` und `A` aus dem Butcher-Scheme gegeben ist, für die rechte Seite `f`, den Startwert `x0` und die Schrittweite `tau` im Intervall `[I(1),I(2)]` durchführt.
Der Rückgabewert `x` soll die Lösung und `t` die Zeitpunkte als Vektor enthalten, `c` soll die Anzahl der durchgeführten Funktionsauswertungen sein.
Testen Sie ihr Programm mit dem Anfangswertproblem

$$x'(t) = \frac{\gamma}{1 + \tan^2(x(t))}, \quad t \in (0, 2], \quad x(0) = -\frac{\pi}{4},$$

indem Sie das explizite Euler-Verfahren, das Verfahren von Runge und Runge-Kutta-4-Verfahren wie folgt anwenden:

a) Bestimmen Sie die exakte Lösung und plotten Sie diese im Vergleich zu den Lösungen der Verfahren für $\gamma = 100$ und $\tau = 2^{-3}, \dots, 2^{-8}$.

b) Berechnen Sie für $\gamma = 1, 10, 100, 1000$ jeweils die Fehler

$$e(\tau) = \max_k |x(t_k) - x_k|$$

für $\tau = 2^{-3}, \dots, 2^{-8}$ und plotten Sie diese in einer doppelt logarithmischen Skala für jedes Verfahren über der Anzahl der f-Auswertungen.

c) Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

Allgemeine Hinweise

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.