Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Ralf Kornhuber, Max Kahnt

12. Übung zur Vorlesung

Numerik I

SoSe 2019

`http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2019/NumerikI.php`

Abgabe: Mi., 17. Juli 2019, 15:00 Uhr
Hinweis: Dieser Übungszettel bietet ausschließlich Bonuspunkte. Die Abgabe des Zettels erfolgt unabhängig vom Tutorium ausschließlich bei Max Kahnt.

1. Bonusaufgabe (2 TP)
Wir haben gesehen, dass sich Anfangswertprobleme als Quadraturaufgaben mit unbekanntem Integranden auffassen lassen. Konstruieren Sie auf diesem Wege das klassische Runge-Kuttaverfahren (RK4) durch Anwendung der Simpsonregel. Geben Sie geeignete Approximationen zur Berechnung der erforderlichen Funktionsauswertungen an.

2. Bonusaufgabe (2 TP)
Betrachten Sie ein explizites Einschrittverfahren der Form

$$\psi^\tau x = x + \tau\gamma_1 f(x) + \tau\gamma_2 f(x + \tau\beta f(x)).$$

Zeigen Sie, dass durch keine Wahl von γ_2 eine Konsistenzordnung $p = 3$ erreicht werden kann.

3. Bonusaufgabe (4 TP)
Es sei ψ^τ ein explizites Einschrittverfahren zur numerischen Lösung von

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \qquad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^d. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- ψ^τ is konsistent, d.h. für den Konsistenzfehler gilt $\epsilon(x,\tau) = o(\tau)$.
- Es gilt $\psi^0 x = x$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\psi^\tau x \,|_{\tau=0} = f(x)$.
- Es gilt $\psi^\tau x = x + \tau h(x,\tau)$ für eine in τ stetige Funktion h mit $h(x,0) = f(x)$.

4. Bonusaufgabe (6 PP)
Betrachten Sie den harmonischen Oszillator

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} x$$

zum Anfangswert $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^2$.

a) Wir wollen uns zunächst eine Vorstellung vom Phasenportrait machen. Lösen Sie dazu den harmonischen Oszillator zu unterschiedlichen Anfangswerten und $\omega > 0$ mit dem numerischen Integrator `ode45.m`, den `matlab` zur Verfügung stellt und plotten Sie das Ergebnis.

   Hinweis: Wir betrachten ein autonomes Problem. Die für `ode45.m` zu übergebende rechte Seite erwartet allgemein nicht-autonomisierte Systeme.

b) Nun wollen wir erforschen, was der explizite bzw. der implizite Euler mit dem harmonischen Oszillator macht. Programmieren Sie dazu den expliziten sowie den impliziten Euler für eine feste Schrittweite τ. Berechnen Sie dann die entsprechenden Iterierten zu den Schrittweiten $\tau = 0.1, 0.01, 0.001$ und zum Anfangswert $x_0 = (1, 0)$ bis zur Zeit $T = 30$. Plotten und interpretieren Sie die Ergebnisse.

c) Was erwarten Sie, wenn man zur Schrittweite $\tau = 0.001$ und Anfangswert $x_0 = (1, 0)$ den harmonische Oszillator mit dem expliziten und impliziten Euler bis zur Zeit $T = 3000$, also dem Hundertfachen der obigen Zeit, berechnen würde, insbesondere für den Fehler $\lim_{k\to\infty} |\phi^{k\tau} x_0 - (\psi^\tau)^k x_0|$?

Allgemeine Hinweise

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.