Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Lasse Hinrichsen

2. Übung zur Vorlesung

Computerorientierte Mathematik II

SoSe 2020

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2020/CoMaII.php

Abgabe: Fr., 15. Mai 2020, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (2TP)

Es seien p, q zwei Polynome von der Gestalt

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \text{ und } q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m .$$

Es gelte überall $p(x) = q(x)$, wobei $a_n \neq 0$ und $b_m \neq 0$ seien. Zeigen Sie, dass dann $n = m$ ist und dass für sämtliche Koeffizienten $a_k = b_k$ gilt.

2. Aufgabe (2TP + 2PP + 2PP + 2PP)

a) Sei $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ mit $x_i \in \mathbb{R}$ ein Satz von $n+1$ paarweise verschiedenen Stützstellen und $p_f \in \mathcal{P}^n$ das Interpolationspolynom von f mit Grad höchstens n und $p_f(x_i) = f(x_i)$ für $i = 0, \ldots, n$. Zeigen Sie, daß die so genannte Vandermondematrix $A \in \mathbb{R}^{n+1 \times n+1}$ mit $A_{ij} = x_{i-1}^{j-1}$ invertierbar ist und

$$p_f(x) = \sum_{i=0}^{n} p_{i+1} x^i$$

mit $p = A^{-1} f(x_{i-1})_{i=1,\ldots,n+1}$ gilt.

b) Schreiben Sie eine Python-Funktion

`monomial_coefficients(xi,f)`,

die zu einer gegebenen Funktion `f` und einem Stützstellenvektor `xi` den Koeffizientenvektor `p` der Interpolierten bezüglich der Monombasis zurückgibt (Hinweis: Um das entstehende lineare Gleichungssystem zu lösen, können Sie `numpy.linalg.solve` verwenden).

Schreiben Sie ferner eine Python-Funktion

`monomial_interpolation(x,p)`,

welche das Interpolationspolynom zum Koeffizientenvektor `p` an den Stellen `x` auswertet.

c) Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} x^i$. Wie lautet der exakte Koeffizientenvektor? Testen Sie Ihr Programm indem Sie für diese Funktion und n uniform verteilte Stützstellen auf $[0, 1]$ mit $n = 1, \ldots, 200$ den Fehler der berechneten Koeffizientenvektoren in der Maximumsnorm über n plotten. Was beobachten Sie? Untersuchen Sie die Kondition der Vandermondematrix (Hinweis: `numpy.linalg.cond`).

d) Testen Sie Ihr Programm für `f=math.sin` und n uniform verteilte Stützstellen auf $[0, \pi]$ mit $n = 1, \ldots, 200$ indem Sie $\max |p_f(x_i) - f(x_i)|$ über n plotten. Plotten Sie außerdem die Funktion und die Interpolationspolynome für $n = 10, 20, 40, 80$.

Schreiben Sie eine PYTHON-Funktion

```
lagrange_interpolation(x,p,xi)
```

welche das Interpolationspolynom mit den Koeffizientenvektor `p` bezüglich der Lagrange-polynome zum Stützstellenvektor `xi` an den Stellen `x` auswertet und wiederholen Sie die Testläufe dieser Teilaufgabe mit diesem Programm.

Was beobachten Sie?

3. Aufgabe (2TP + 2TP)

Seien die Stützstellen $x = (x_0, \ldots, x_n)$ gegeben durch $0 \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n < 1$. Die Lagrange-Polynome bezüglich den Stützstellen x sind dann gegeben durch

$$L_k(\xi) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{\xi - x_i}{x_k - x_i}, \quad k = 0, \ldots, n. \tag{1}$$

a) Zeigen Sie oder widerlegen Sie, dass die Lagrange-Polynome eine Basis des Polynomraums

$$P_n = \{v \in C[a, b] \mid v(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \ a_k \in \mathbb{R}\} \tag{2}$$

darstellen.

b) Zeigen Sie oder widerlegen Sie, dass die Lagrange-Polynome die Zerlegung der Eins

$$\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

erfüllen.

ALLGEMEINE HINWEISE

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.