

3. Übung zur Vorlesung
COMPUTERORIENTIERTE MATHEMATIK II

SoSe 2020

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2020/CoMaII.php

Abgabe: Fr., 29. Mai 2020, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (6 TP)

Es seien die Funktion $f(x) = \sin(x)$ sowie die Stützstellen $x_0 = -\pi$, $x_1 = -\frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$ und $x_3 = \pi$ gegeben.

- a) Berechnen Sie das Interpolationspolynom p in der Newtonschen Darstellung. Verwenden Sie dazu das Neville-Schema.
- b) Werten Sie p an der Stelle $x = \frac{3\pi}{2}$ mittels Horner-Schema aus.
- c) Stellen Sie p in der Monomdarstellung dar.
- d) Fügen Sie die Stützstelle $x_4 = 0$ hinzu und berechnen Sie die dividierte Differenz $f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$.

2. Aufgabe (4 TP)

Beweisen Sie, dass die dividierten Differenzen von der Reihenfolge der Stützstellen unabhängig sind. Genauer: Sei $\sigma \in S_{n+1}$ eine Permutation der Zahlen $0, \dots, n$, so gilt

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = f[x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}].$$

Bitte wenden!

3. Aufgabe (6 PP)

Wir wollen eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit Hilfe dividierter Differenzen interpolieren und anschließend mit dem Horner-Schema auswerten.

- a) Implementieren Sie eine Funktion `divided_differences(f, x)`, die zu einer Eingabefunktion f und einem Eingabevektor $x = (x_0, \dots, x_{n-1})$ paarweise verschiedener Stützstellen die untere Dreiecksmatrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ der dividierten Differenzen mittels Neville-Schema berechnet. Insbesondere soll für $j \leq i$ (wobei $i \in \{0, \dots, n-1\}$) also $A_{ij} = f[x_{i-j}, \dots, x_i]$ gelten.
- b) Implementieren Sie eine Funktion `horner_eval(a, x, y)`, die zu einem gegebenen Vektor $a = (a_0, \dots, a_{n-1})$ von Newton-Koeffizienten und einem Vektor $x = (x_0, \dots, x_{n-1})$ paarweise verschiedener Stützstellen das Horner-Schema im Punkt $y \in \mathbb{R}$ auswertet und das Ergebnis zurückgibt. Dabei entspreche a_i dem Koeffizienten zum Newtonpolynom des Grades i .
- c) Schreiben Sie ein Skript, das zu der Funktion $f(x) = \cos(x)$ und für $n = 5$ äquidistante Stützstellen auf $[0, 2\pi]$ die Newton-Koeffizienten des dazugehörigen Interpolationspolynoms p berechnet. Plotten Sie anschließend die Funktionen f und p auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ (inklusive einer Legende zur Beschriftung) und speichern Sie die Abbildung als `comparison.png` ab.

ALLGEMEINE HINWEISE

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.