Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Lasse Hinrichsen

7. Übung zur Vorlesung

Computerorientierte Mathematik II

SoSe 2020

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2020/CoMaII.php

Abgabe: Fr., 26. Juni 2020, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (1 TP + 1 TP)

a) Zeigen Sie, dass $y(t) = \frac{1}{1+t^2}$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y'(t) &= F(t, y(t)), \quad \text{für } t > 0 \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

mit $F(t,x) = -2tx^2$ und $y_0 = 1$ ist.

b) Zeigen Sie, dass $y(t) = e^{-2t} + 1$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y'(t) &= F(t, y(t)), \quad \text{für } t > 0 \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

mit $F(t,x) = 2 - 2x$ und $y_0 = 2$ ist.

2. Aufgabe (0 PP + 2 PP + 2 TP + 2 TP + 2 Bonus TP + 2 Bonus TP)

Wir wollen versuchen, ein beliebiges Integral der Form

$$\int_0^1 f(x)dx$$

numerisch zu approximieren. Dazu teilen wir das Intervall $[0,1]$ äquidistant in m Teilintervalle

$$V_k = [z_k, z_{k+1}], \quad k = 0, \dots, m-1$$

bezüglich der Stützstellen $0 = z_0 < z_1 < \dots < z_m = 1$. Wir betrachten die sogenannte Riemann-Summe auf den Teilintervallen

$$I_{V_k}(f) \approx hf(z_k + \alpha h),$$

wobei $h = \frac{1}{m}$ und $\alpha \in [0,1]$ fest gegeben ist. Die Riemann-Summe der nullten Ordnung bezüglich α ergibt sich durch das Aufsummieren über k

$$\int_0^1 f(x)dx \approx S_m^{(0,\alpha)}(f) = \sum_{k=0}^{m-1} I_{V_K}(f) = h \sum_{k=0}^{m-1} f(z_k + \alpha h).$$

a) Schreiben Sie eine Python-Funktion **riemann**(V, f, m, α). Dabei bezeichnet V das Integrationsintervall, f die Funktion, m die Anzahl der Teilintervalle sowie $\alpha \in [0,1]$.

b) Sei $f = \frac{1}{1+x^2}$. Testen Sie das Programm für $m = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128$ sowie $\alpha = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$. Plotten Sie den Fehler über h mit geeigneten Skalen und bestimmen Sie die Konvergenzordnung. Ferner bestimmen Sie die Konvergenzordnung für die verschiedenen Werte von α. Beschreiben Sie Ihre Beobachtungen und erklären Sie diese.

c) Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$, zeigen Sie, dass für jedes $\alpha \in [0,1]$ die folgende Fehlerabschätzung gilt.

$$|I(f) - S_m^{(0,\alpha)}(f)| \leq h\|f'\|_\infty.$$

d) Sei $f \in C^2(\mathbb{R})$, zeigen Sie, dass für ein bestimmtes $\hat{\alpha} \in [0,1]$ sogar die folgende Fehlerabschätzung gilt.

$$|I(f) - S_m^{(0,\hat{\alpha})}(f)| \leq \frac{h^2}{2}\|f''\|_\infty,$$

e) Zeigen Sie, dass für Lipschitz-stetiges f die Abschätzung aus c) mit der Lipschitz-Konstante L_f statt $\|f''\|$ gilt.

f) Zeigen Sie, dass für differenzierbares f mit Lipschitz-stetigem f' die Abschätzung aus d) mit der Lipschitz-Konstante $L_{f'}$ statt $\|f''\|$ gilt.

3. Aufgabe (6 TP)
In dem Artikel "A Mathematical Model for the Determination of Total Area Under Glucose Tolerance and Other Metabolic Curves" von Mary M. Tai (`https://math.berkeley.edu/~ehallman/math1B/TaisMethod.pdf`) wird das sogenannte Modell von Tai zur Bestimmung der Fläche unter einer Kurve entwickelt. Beschreiben Sie das mathematische Modell und diskutieren Sie den Artikel vor dem Hintergrund der Inhalte aus der Vorlesung. Geben Sie eine Fehlerabschätzung für das vorgestellte Verfahren an.

Allgemeine Hinweise

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.