Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Lasse Hinrichsen

8. Übung zur Vorlesung

Computerorientierte Mathematik II

SoSe 2020

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2020/CoMaII.php

Abgabe: Fr., 3. Juli 2020, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (4 TP)
Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f \in C((0,\infty))$. Beweisen Sie, dass die Menge der Lösungen der Differentialgleichung

$$x'(t) = \lambda x(t) + f(t), \quad t > 0$$

durch

$$V = \left\{ [0,\infty) \ni t \mapsto \alpha e^{\lambda t} + \int_0^t f(\eta) e^{\lambda(t-\eta)} \, \mathrm{d}\eta \in \mathbb{R} \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

gegeben ist. Zeigen Sie darüber hinaus, dass V ein affiner Unterraum von $C([0,\infty))$ ist.

2. Aufgabe (3 TP)
Wir wollen ein Modell für das Wachstum einer Bakterienkultur entwickeln. Die Vermehrung der Bakterien soll dabei durch Teilung erfolgen. Bekannt sei die Anzahl x_0 der Bakterien zum Zeitpunkt $t = 0$ und gesucht sei

$$x(t): \qquad \text{Anzahl der Bakterien zum Zeitpunkt } t > 0.$$

a) Es sei $p\Delta t$, $p \in (0,1)$ die Wahrscheinlichkeit, daß sich ein Bakterium während eines „kleinen“ Zeitintervalles Δt teile. Stellen Sie auf Grundlage dieser Annahme eine Differentialgleichung für x' auf.

b) Das in Aufgabenteil a) entwickelte Modell soll verbessert werden. Wir nehmen nun zusätzlich an, daß Konkurrenz zweier Bakterien innerhalb des „kleinen“ Zeitintervalles Δt zum Absterben von

$$\Delta x_{\text{kon}} = k x(t)^2 \, \Delta t \,, \qquad k > 0 \,,$$

Bakterien führe. Die Konzentration der Bakterien sei dabei für alle Zeiten ortsunabhängig. Stellen Sie ein verbessertes Modell für das Bakterienwachstum auf, d.h. geben Sie eine Differentialgleichung für x' an, die sowohl Vermehrung als auch Konkurrenz berücksichtigt.

c) Geben Sie für die in a) bzw. b) aufgestellte Differentialgleichung jeweils die exakte Lösung an und untersuchen Sie jeweils das Verhalten von $x(t)$ für $t \to \infty$. Welche Bedeutung hat der Modellparamter k?

Hinweis: Eine Möglichkeit die ODE in b) zu lösen wäre zum Beispiel das Kommando *dsolve* in Maple. Aber auch eine Literaturrecherche oder fleissiges Rechnen können eine Lösung liefern.

3. Aufgabe (2 TP + 4 PP)
Zu $T \in \mathbb{R}_{>0}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2x(t) + 2te^{2t}, \quad \text{für } 0 < t < T \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie die Lösung $x\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ dieses Anfangswertproblems analytisch in Abhängigkeit des Startpunkts x_0. Der finale Ausdruck sollte hierbei kein Integral mehr beinhalten.

b) Sei $T = 10$, $x_0 = 1$ und $\widetilde{x}_0 = 1.001$. Wir bezeichnen mit x die Lösung des AWPs mit $x(0) = x_0$ und mit $\widetilde{x}$ die Lösung des AWPs mit $\widetilde{x}(0) = \widetilde{x}_0$.

   Plotten Sie die Funktionen x und $\widetilde{x}$ in einer Abbildung über dem Intervall $[0,T]$. Plotten Sie ferner auch den Fehler $|x(t) - \widetilde{x}(t)|$ in eine weitere Grafik. Was beobachten Sie und wie interpretieren Sie das Ergebnis?

Allgemeine Hinweise

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.