Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Lasse Hinrichsen

9. Übung zur Vorlesung

Computerorientierte Mathematik II

SoSe 2020

`http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2020/CoMaII.php`

Abgabe: Fr., 10. Juli 2020, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (3 TP)
Zu $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f \in C([0, \infty))$ betrachten wir das Anfangswertproblem

$$x'(t) = \lambda x(t) + f(t), \qquad x(0) = x_0. \tag{AWP}$$

Zeigen Sie, dass die Iterierten des impliziten Euler-Verfahrens aus der Vorlesung zum Nähern der Lösung von (AWP) genau dann eindeutig definiert sind, wenn $\tau \neq \frac{1}{\lambda}$ gilt, wobei $\tau > 0$ die Zeit-Schrittweite bezeichnet. Insbesondere ist das implizite Euler-Verfahren für (AWP) und $\lambda < 0$ also für beliebige Schrittweiten wohldefiniert.

2. Aufgabe (4 TP)
Zur Differentialgleichung

$$x'(t) = \lambda x(t)\,, \qquad 0 < t \leq T$$

für $\lambda > 0$ seien x_k und $\tilde{x}_k$ die mit dem impliziten Euler-Verfahren gewonnenen Näherungslösungen zu den Anfangswerten x_0 bzw. $\tilde{x}_0$. Zeigen Sie, daß unter der Schrittweitenbeschränkung $\tau < \frac{1}{\lambda}$ die folgende Abschätzung für die diskrete Kondition des impliziten Euler-Verfahrens gilt:

$$|x_k - \tilde{x}_k| \leq e^{\frac{T\lambda}{1-\tau\lambda}} |x_0 - \tilde{x}_0|.$$

3. Aufgabe (6 PP)
Wir möchten Anfangswertprobleme der Form

$$x'(t) = \lambda x(t) + f(t), \qquad x(0) = x_0 \tag{AWP}$$

in Python numerisch lösen.

a) Implementieren Sie eine Funktion `explicitEuler(A, f, x0, T, n)`, die das Problem (AWP) mit $\lambda =$ `A` näherungsweise mittels des expliziten Euler-Verfahrens aus der Vorlesung löst und den Vektor aller Iterierten als $\texttt{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$ (inklusive Startwert) zurückgibt. Hierbei sei die Zeit-Schrittweite durch $\tau := \frac{T}{n}$ definiert.

b) Implementieren Sie analog eine Funktion `implicitEuler(A, f, x0, T, n)`, die (AWP) mit dem impliziten Euler-Verfahren aus der Vorlesung löst und als Ergebnis die Iterierten $\texttt{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$ zurückgibt.

c) Wir betrachten nun die konkrete Wahl $\lambda = 16$, $f(t) = t$, $T = 8$ und $x_0 = 1$. Lösen Sie das Anfangswertproblem (AWP) jeweils mit dem expliziten und mit dem impliziten Euler-Verfahren für $n = 60$ und für $n = 120$. Plotten Sie Ihre Lösungen jeweils mit einer geeigneten Skalierung; die Skalierung muss dabei *nicht* für alle Plots übereinstimmen! Was beobachten Sie und wie erklären Sie sich dieses Verhalten?

   Hinweis: Zum Vergleich dürfen Sie ohne Beweis verwenden, dass die analytische Lösung des Problems durch $x(t) = \frac{257}{256}e^{16t} - \frac{t}{16} - \frac{1}{256}$ gegeben ist.

Hinweis: Beachten Sie, dass `lambda` in Python ein reserviertes Schlüsselwort ist. Den Funktionsparametern wurde daher der Name `A` statt `lambda` gegeben!

Allgemeine Hinweise

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.