

10. Übung zur Vorlesung
COMPUTERORIENTIERTE MATHEMATIK II

SoSe 2020

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2020/CoMaII.php

Abgabe: Fr., 17. Juli 2020, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (4 TP)

Sei $\lambda \in \mathbb{R}_{\leq 0}$ oder gelte $\lambda \in \mathbb{R}_{> 0}$ mit einer Schrittweite $\tau \leq \tau_0$, wobei $\tau_0 < \frac{1}{\lambda}$. Zeigen Sie: Das implizite Euler-Verfahren (3.37) aus dem Skript ist konsistent mit Ordnung $p = 1$.

2. Aufgabe (6 TP)

Sei $\lambda, x_0 \in \mathbb{R}$ und $f \in C^1([0, \infty))$. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}x'(t) &= \lambda x(t) + f(t), \quad 0 < t < T \\x(0) &= x_0.\end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass dieses Problem eine Lösung $x \in C^3([0, \infty))$ besitzt.

Zu $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Schrittweite $\tau := \frac{T}{n}$ und Zeitpunkte $t_k := k\tau$. Wir definieren x_{k+1} für $k \in \{1, \dots, n\}$ iterativ durch

$$\begin{aligned}y_k &:= \lambda x_k + f(t_k) + \frac{\tau}{2} (f'(t_k) + \lambda^2 x_k + \lambda f(t_k)) \\x_{k+1} &:= x_k + \tau y_k.\end{aligned}$$

- Beweisen Sie, dass das so definierte Verfahren die Konsistenzordnung $p = 2$ hat.
- Sei $f \equiv 0$. Für welche Schrittweiten ist das Verfahren im Falle von $\lambda > 0$ bzw. $\lambda < 0$ stabil?

3. Aufgabe (6 TP)

Seien $x_\Delta, \tilde{x}_\Delta$ die mit dem impliziten Euler-Verfahren (3.37) berechneten Näherungslösungen zu den Anfangswerten $x_0, \tilde{x}_0 \in \mathbb{R}$ sowie den diskreten rechten Seiten $f_\Delta, \tilde{f}_\Delta$ mit $f_\Delta(t_k) = f_k, \tilde{f}_\Delta(t_k) = \tilde{f}_k, k = 1, \dots, n$. Zeigen Sie für $\lambda \leq 0$ die Abschätzung

$$\|x_\Delta - \tilde{x}_\Delta\|_\infty \leq (1 + T) \max \left\{ |x_0 - \tilde{x}_0|, \|f_\Delta - \tilde{f}_\Delta\|_\infty \right\}.$$

ALLGEMEINE HINWEISE

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.