Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Lasse Hinrichsen

11. Übung zur Vorlesung

# Computerorientierte Mathematik II

SoSe 2020

`http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2020/CoMaII.php`

**Abgabe: Fr., 7. August 2020, 12:00 Uhr**
**Hinweis:** Dies ist ein reiner Bonuszettel. Falls Ihre Gruppe bereits die benötigten Punkte erreicht hat, wird Ihr Tutor bzw. Ihre Tutorin diesen Zettel nicht mehr korrigieren.

**1. Aufgabe** (6 Bonus TP)
Zu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \qquad x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

betrachten wir das Anfangswertproblem

$$x'(t) = Ax(t),\ t \in (0, T], \qquad x(0) = x_0.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $A$.

b) Bestimmen Sie eine Lösung dieses Anfangswertproblems. Geben Sie Ihre Lösung ohne Verwendung der Matrix-wertigen Exponentialfunktion an.

c) Berechnen Sie die absolute Kondition des Anfangswertproblems.

**2. Aufgabe** (6 Bonus TP)
Zu einer beliebigen Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ betrachten wir die Differentialgleichung

$$y'(t) = Ay(t).$$

a) Seien $x\colon [0, T] \to \mathbb{R}^m$ und $y\colon [0, T] \to \mathbb{R}^m$ Lösungen der obigen Differentialgleichung. Zeigen Sie für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$, dass auch $z = ax + by$ eine Lösung ist.

b) Beweisen Sie für beliebiges $c \in \mathbb{R}_{>0}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix},$$

dass

$$x(t) = \begin{pmatrix} \sin(ct) \\ \cos(ct) \end{pmatrix}, \qquad y(t) = \begin{pmatrix} -\cos(ct) \\ \sin(ct) \end{pmatrix}$$

Lösungen der Differentialgleichung sind.

c) Sei $A$ wie in Teilaufgabe b) sowie $y_0 \in \mathbb{R}^2$ gegeben. Bestimmen Sie eine Funktion $y$, die die obige Differentialgleichung löst und $y(0) = y_0$ erfüllt.

**3. Aufgabe** (2 Bonus TP + 9 Bonus PP)
Betrachten Sie die Funktion

$$\varphi(x) = \frac{1}{2+x} \tag{1}$$

auf dem Interval $[0, 1]$.

a) Zeigen Sie, dass $\varphi$ eine Kontraktion ist und folgern Sie, dass ein eindeutiger Fixpunkt $x^\star$ existiert.

b) Schreiben Sie eine Python Funktion
`fixpunkt_iteration(f, x0, tol, max_iterationen=1000)`
die für eine gegebene Funktion `f` die Fixpunktiteration

$$x_{k+1} = \mathtt{f}(x_k)$$

anwendet, bis entweder $|x_k - f(x_k)| <$ `tol` gilt, oder $k =$ `max_iterationen` erreicht wurde. Die Funktion soll ein Tupel `(x_k, f_eval)` zurückgeben, wobei `x_k` der errechnete Fixpunkt ist und `f_eval` die Anzahl der Auswertungen von `f`.

c) Das Newton Verfahren zur Lösung von Gleichungen der Form $f(x) = 0$ ist definiert durch

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \tag{2}$$

siehe auch das entsprechende Kapitel im Skript.

Schreiben Sie eine Python Funktion
`newton(f, df, x0, tol, max_iterationen=1000)`
die für eine gegebene Funktion `f` und ihrer Ableitung `df`, das Newton Verfahren (2) anwendet, bis entweder $|f(x_k)| <$ `tol` gilt, oder $k =$ `max_iterationen` erreicht wurde. Die Funktion soll ein Tupel `(x_k, f_eval)` zurückgeben, wobei `x_k` die errechnete Nullstelle ist und `f_eval` die Anzahl der Auswertungen von `f` und `df`.

d) Schreiben Sie die Fixpunktgleichung

$$x^\star = \varphi(x^\star) \tag{3}$$

(mit $\varphi$ wie in (1)) so um, dass Sie eine Gleichung der Form

$$0 = \tilde{\varphi}(x^\star) \tag{4}$$

erhalten. Wenden Sie für die Startwerte $x_0 \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ und die Fehlerschranken `tol` $\in \left\{10^{-2}, 10^{-3}, \cdots, 10^{-12}\right\}$ jeweils das Fixpunktverfahren auf (3) und das Newton-Verfahren auf (4) an, und plotten Sie die benötigten Funktionsaufrufe über die Fehlerschranken (mit geeigneter Skalierung). Was beobachten Sie?

## Allgemeine Hinweise

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.