6

Satz 1.1 Die Interpolationsaufgabe

$$p_n \in \mathcal{P}_n : \quad p_n(x_k) = f(x_k) \quad k=0,\dots,n \quad (1.1)$$

hat eine eindeutig bestimmte Lösung.

Beweis: Es gilt $L_k(x_i) = \delta_{ik}$. Also erfüllt

$$\underbrace{p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k(x)}_{(1.2)}$$

die Interpolationsbed. (1.1).

Seien $p_n, q_n \in \mathcal{P}_n$ zwei Lösungen von (1.1), dann gilt

$$(p_n - q_n)(x_k) = f(x_k) - f(x_k) = 0. \quad k=0,\dots,n$$

D.h. $p_n - q_n \in \mathcal{P}_n$ hat $n+1$ Nullstellen.

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra gilt somit

$p_n - q_n \equiv 0$. ☒

Kondition der Interpolationsaufgabe

Da eine stetige Funktion auf abgeschl. und beschr. Intervall $[a,b]$ ihr Maximum annimmt, ist die Maximumsnorm

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

wohldefiniert für alle $f \in C[a,b]$.

Maximale Abweichung

$$\|f - \tilde{f}\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - \tilde{f}(x)|$$

(7)

<u>Satz 1.2</u> Es sei $\phi_n : C[a,b] \to \mathbb{P}_n$ der durch
$$\phi_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k \quad \in \mathbb{P}_n$$
<u>Interpolationsoperator</u>. Dann ist ϕ_n linear, d.h.
$$\phi_n(\alpha f + \beta g) = \alpha \phi_n(f) + \beta \phi_n(g)$$
$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ f, g \in C[a,b].$$

Außerdem gilt
$$\sup_{\substack{f \in C[a,b] \\ f \neq 0}} \frac{\|\phi_n(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} = \Lambda_n$$
mit der <u>Lebesgue-Konstante</u>
$$\Lambda_n = \Big\| \sum_{k=0}^{n} |L_k| \Big\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} \sum_{k=0}^{n} |L_k(x)|.$$

<u>Konsequenz</u>

Ang. p_n und $\tilde{p}_n$ sind Lösungen für f und $\tilde{f}$.

Dann $p_n = \phi_n(f)$, $\tilde{p}_n = \phi_n(\tilde{f})$ und weil ϕ linear
$$\underbrace{p_n - \tilde{p}_n}_{\in \mathbb{P}_n} = \phi_n(f) - \phi_n(\tilde{f}) = \phi_n(\underbrace{f - \tilde{f}}_{\in C[a,b]})$$
Lt. Satz gilt:
$$\|\phi_n(g)\| \leq \Lambda_n \|g\|_\infty$$
und insbesondere für $g = f - \tilde{f}$
$$\|p_n - \tilde{p}_n\|_\infty = \|\phi_n(f - \tilde{f})\|_\infty \leq \Lambda_n \|f - \tilde{f}\|_\infty$$

⑧

Beweis (Satz 1.2)

Linearität: Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f, g \in C[a,b]$, dann gilt:

$$\phi_n(\alpha f + \beta g) = \sum_{k=0}^{n} (\alpha f + \beta g)(x_k) L_k$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\alpha f(x_k) + \beta g(x_k)\right) L_k$$
$$= \alpha \underbrace{\sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k}_{} + \beta \underbrace{\sum_{k=0}^{n} g(x_k) L_k}_{}$$
$$= \alpha \quad \phi_n(f) \quad + \beta \quad \phi_n(g).$$

obere Abschätzung $\dfrac{\|\phi_n(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} \leq \Lambda_n \quad \forall f \in C[a,b]$

Sei $f \in C[a,b]$ beliebig. Dann gilt

$$\|\phi_n(f)\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} \Big| \sum_{k=0}^{n} \overbrace{f(x_k)}^{\leq \max_{\xi \in [a,b]} |f(\xi)|} L_k(x) \Big|$$
$$\leq \max_{x \in [a,b]} \sum_{k=0}^{n} \max_{\xi \in [a,b]} |f(\xi)| \, |L_k(x)|$$
$$= \|f\|_\infty \underbrace{\max_{x \in [a,b]} \sum_{k=0}^{n} |L_k(x)|}_{= \Lambda_n}.$$

Also gilt $\|\phi_n(f)\|_\infty \leq \Lambda_n \|f\|_\infty \quad \forall f \in C[a,b]$

und somit $\displaystyle\sup_{\substack{f \in C[a,b] \\ f \neq 0}} \frac{\|\phi_n(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} \leq \Lambda_n$. ⊛

Gleichheit „=" in ⊛:

Wir konstruieren ein $f^* \in C[a,b]$ mit
$$\|\phi_n(f^*)\|_\infty = \Lambda_n \|f^*\|_\infty.$$

Zunächst wähle $x^* \in [a,b]$ mit

$$\sum_{k=0}^{n} |L_k(x^*)| = \max_{x \in [a,b]} \sum_{k=0}^{n} |L_k(x)| = \Lambda_n.$$

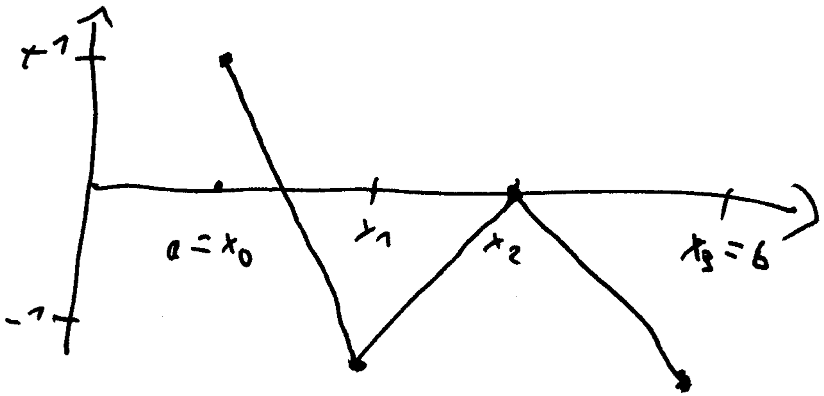
Das geht, weil $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} |L_k(x)|$ stetig ist.

⑨ Wir wissen schon $\sum_{k=0}^{n} |L_k(x^*)| = \Lambda_n$.

Wähle $f^* \in C[a,b]$ so, dass gilt

f^* ist linear auf $[x_k, x_{k+1}]$ $k = 0, \dots, n-1$

$$f^*(x_k) = \operatorname{sgn}(L_k(x^*)) := \begin{cases} 1 & \text{falls } L_k(x^*) > 0 \\ 0 & \text{falls } L_k(x^*) = 0 \\ -1 & \text{falls } L_k(x^*) < 0. \end{cases}$$



Dann gilt

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f^*(x)| \leq 1.$$

Außerdem

$$\|\phi_n(f^*)\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} \left| \sum_{k=0}^{n} \operatorname{sgn}(L_k(x^*)) \, L_k(x) \right|$$

$$\geq \left| \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\operatorname{sgn}(L_k(x^*)) L_k(x^*)}_{|L_k(x^*)|} \right| = \sum_{k=0}^{n} |L_k(x^*)| = \Lambda_n \geq \Lambda_n \|f\|_\infty$$

Also gilt

$$\|\phi_n(f^*)\|_\infty \geq \Lambda_n \|f^*\|_\infty.$$

Außerdem

$$\|\phi_n(f)\|_\infty \leq \Lambda_n \|f\|_\infty$$

$$\Rightarrow \|\phi_n(f^*)\|_\infty = \Lambda_n \|f^*\|_\infty.$$

$\square$

<u>Zusammenfassung</u>

- Interpolationsaufgabe hat eindeutige Lösung.
- Der Ausgabefehler $\|p_n - \tilde{p}_n\|_\infty$ lässt sich durch $\Lambda_n \|f - \tilde{f}\|_\infty$ beschränken.

  ($\Rightarrow$ Lösung hängt stetig von den Daten ab)

Interpolationsaufgabe ist <u>wohlgestellt</u>.