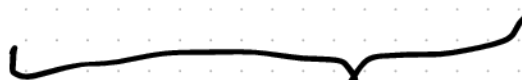


(10) Einwertung $a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$, $f \in C[a, b]$

$$p_n \in \mathcal{P}_n: \quad p_n(x_k) = f(x_k) \quad k=0, \dots, n \quad (1.1)$$

Satz 1.1 $\exists!$ Lösung von (1.1)

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) L_k(x), \quad L_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

 $k=0, \dots, n$
Lagrange-Darstellung von p_n

Satz 1.2 Interp. op. $\phi_n: C[a, b] \rightarrow \mathcal{P}_n$

$$\phi_n(f) = \sum_{k=0}^n f(x_k) L_k \quad \text{Lebesgue-Konstante}$$

• ϕ_n linear

• $\sup_{\substack{f \in C[a, b] \\ f \neq 0}} \frac{\|\phi_n(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} = L_n = \left\| \sum_{k=0}^n |L_k| \right\|_\infty$

- ⑨⑦ Folgerung · $\|\phi_n(x) - \phi_n(y)\|_{\infty} \leq L_n \|x - y\|_{\infty}$
- $p_n = \phi_n(x)$, $\tilde{p}_n = \phi_n(\tilde{x})$
 - $\|p_n - \tilde{p}_n\|_{\infty} \leq L_n \|x - \tilde{x}\|_{\infty}$

Die absolute Kondition der Polynominterpolation K_{abs} ist gegeben durch

$$K_{abs} = L_n$$

$$x_k \approx x_{k+1}, \text{ bzw. } x_k - x_{k+1} \approx 0 \Rightarrow L_n \gg 1$$

Heute · Aufwand Polynominterpolation
· andere Darstellung

(12) Aufwandsmaß = Anzahl der Punktoperationen.

Aufwand der Auswertung eines L_k : $n + n + 1 = O(n)$

- " - " - von p_n : $(2n+1)(n+1) \in O(n^2)$
in der Lagrange-Darstellung

Ziel: Darstellung, so dass Auswertung von $O(n)$
Punkt. op. benötigt.

Wir betrachten die Newtonsche Darstellung

$$p_n(x) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k) = \sum_{i=0}^n a_i \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k) \in \mathcal{P}_n$$

$\uparrow$
wobei $\prod_{k=0}^{-1} (x - x_k) := 1$
"leeres Produkt"

$$(19) \quad p_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k)$$

$$= a_0 + (x - x_0) \left(a_1 + (x - x_1) \left(a_2 + (x - x_2) \left(a_3 + \dots (x - x_{n-1}) a_n \right) \right) \right)$$

$\Rightarrow$ Wir können p_n rekursiv mit n -Punkt.op auswerten ¹⁾

Alg 1.3 (Horner-Schema) $O(n)$

Initialisierung: $S_n = a_n$

Rekursion: Für $k = n-1, \dots, 0$ setze $\{$

$$S_k = a_k + (x - x_k) S_{k+1}$$

$\}$

Ergebnis: $p_n(x) = S_0$

Vorteil: nur $O(n)$ Punktop.
für Auswertung

Nachteil(?): Wir müssen erst
die Koeffiz.
 a_i berechnen.

19) Beobachtung Sei p_n die Lösung von (P.1)

$$f(x_\ell) = p_n(x_\ell) = \sum_{i=0}^n a_i \underbrace{\prod_{k=0, k \neq \ell}^{i-1} (x_\ell - x_k)}_{=0, \text{ wenn } i-1 \geq \ell} = \sum_{i=0}^{\ell} a_i \prod_{k=0}^{i-1} (x_\ell - x_k)$$

$$f(x_0) = p_n(x_0) = a_0 \quad \Rightarrow a_0 = f(x_0)$$

$$f(x_1) = p_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) \quad \Rightarrow a_1 = \frac{f(x_1) - a_0}{x_1 - x_0}$$

$$\vdots$$
$$f(x_{\ell+1}) = p_n(x_{\ell+1}) = \sum_{i=0}^{\ell} a_i \prod_{k=0}^{i-1} (x_{\ell+1} - x_k) + a_{\ell+1} \prod_{k=0}^{\ell} (x_{\ell+1} - x_k)$$
$$\Rightarrow a_{\ell+1} = \frac{f(x_{\ell+1}) - \sum_{i=0}^{\ell} a_i \prod_{k=0}^{i-1} (x_{\ell+1} - x_k)}{\prod_{k=0}^{\ell} (x_{\ell+1} - x_k)}$$

$$(15) \quad \text{Sei } p_\ell(x) = \sum_{i=0}^{\ell} a_i \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k)$$

Dann

$$f(x_\ell) = p_n(x_\ell) = p_\ell(x_\ell)$$

$$f(x_{\ell+1}) = p_n(x_{\ell+1}) = p_{\ell+1}(x_{\ell+1})$$

$$= p_\ell(x_{\ell+1}) + a_{\ell+1} \prod_{k=0}^{\ell} (x_{\ell+1} - x_k)$$

$$\Rightarrow a_{\ell+1} = \frac{f(x_{\ell+1}) - p_\ell(x_{\ell+1})}{\prod_{k=0}^{\ell} (x_{\ell+1} - x_k)}$$

p_ℓ hängt nur von $a_0, \dots, a_\ell$

(16)

Beobachtung

$$f(x_\ell) = p_n(x_\ell) = p_\ell(x_\ell)$$

und

$$f(x_k) = p_n(x_k) = p_\ell(x_k) \quad \text{für } k=0, \dots, \ell$$

$\Rightarrow p_\ell \in \mathcal{P}_\ell$ ist das Interpolationspolynom
für $x_0, \dots, x_\ell$

Beobachtung: q_i hängt nur von $x_0, \dots, x_i$ ab,
 $f(x_0), \dots, f(x_i)$

Der Aufwand eine weitere Stelle x_{n+1}
hin zu zufügen (d.h. q_{n+1} zu berechnen)
ist $O(n)$ Punktop.

(12) Def 1.4 Die Koeffizienten

$$a_i =: f[x_0, \dots, x_i] \quad i = 0, \dots, n$$

heißen Newton'sche dividierte Differenzen.

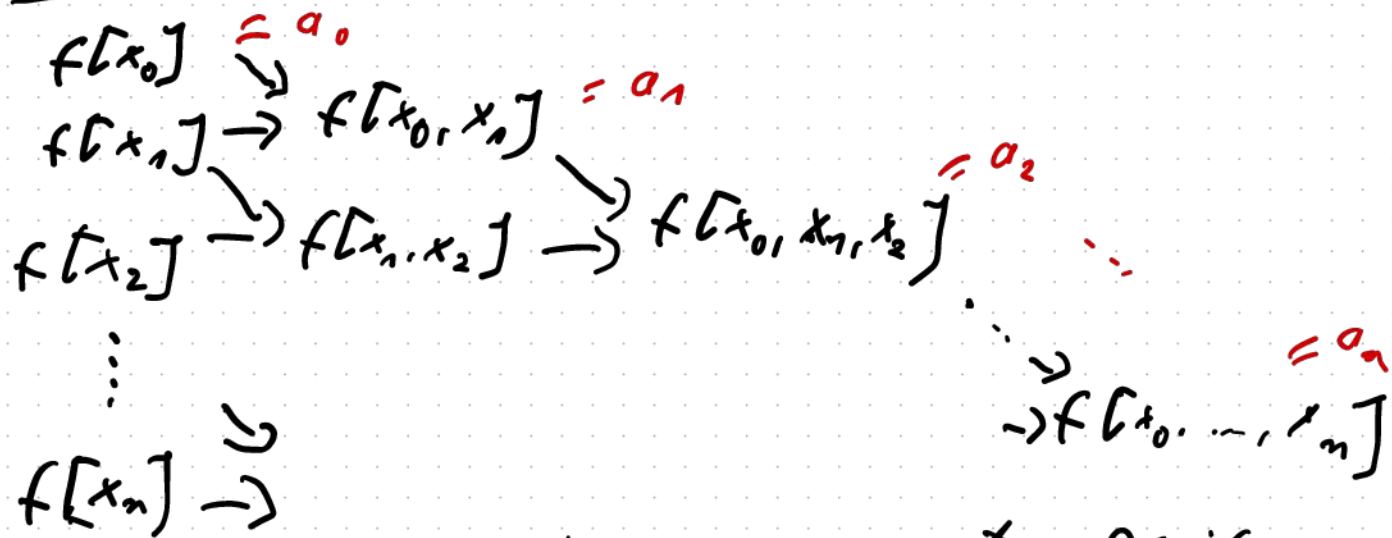
Satz 1.5 Es gilt:

$$\begin{aligned} f[x_i] &= f(x_i) \quad i = 0, \dots, n \\ f[x_i, \dots, x_k] &= \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_k] - f[x_i, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_i} \end{aligned}$$

für $0 \leq i < k \leq n$

Beweis (Skript)

(18) Das führt auf
Algorithmus 6 (Neville)



- Aufwand:
- 1 Division pro waagerechten Pfeil
 - Aufwand für $a_0, \dots, a_n$ $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \in O(n^2)$
 - Aufwand 1. Stützstelle x_{n+1} (d.h. 1 Zeile)
 hinzu zu fügen: $n+1$ zusätzliche P. open.

(19) Lagrange-Darstellung

- Auswertung: $O(n^2)$
- Aufstellen: von scratch

Newton'sche Darstellung

- Auswertung: $O(n)$
- Aufstellerauswertung: $O(n^2)$
- Aufstellen von p_{n+1} aus p : $O(n)$

20

Ang. wir wollen p_n nur an gleichen
Stelle auswerten:

Zusammenfassen von Horner-Schem 1 und
Neville-Schem 2:

Sei $p_{i,k} \in \mathcal{P}_{k-1}$: $p_{i,k}(x_j) = f(x_j)$ $j = i, \dots, k$

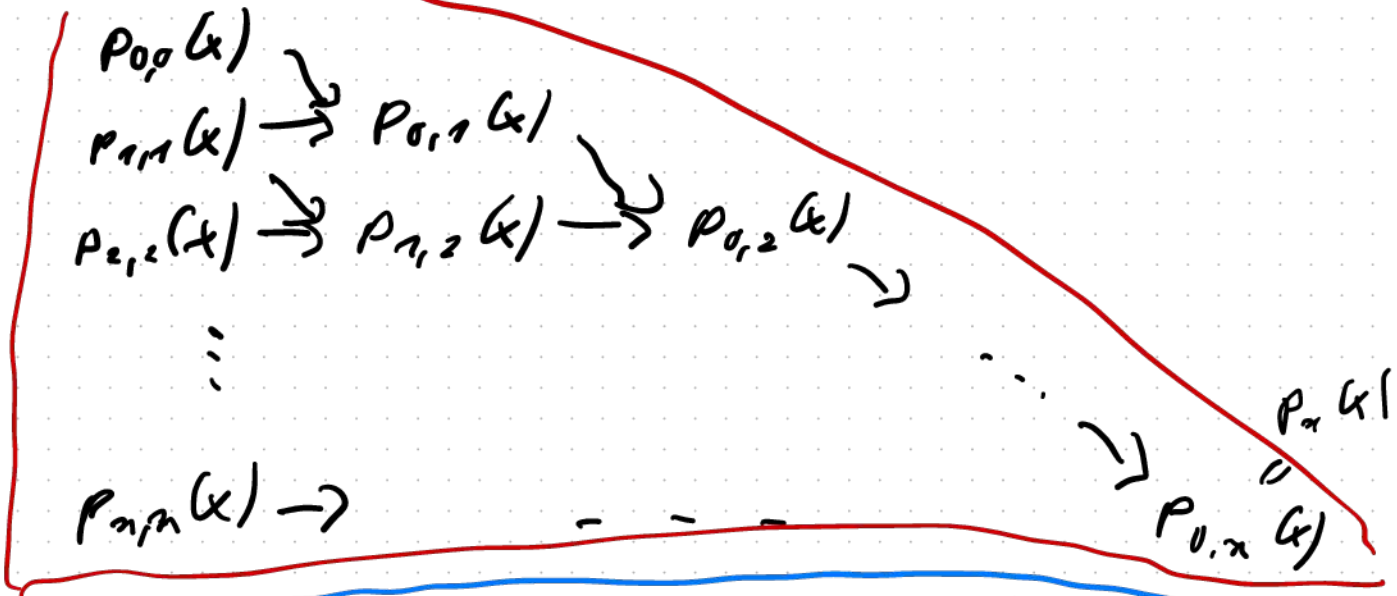
damit gilt (Beweis von Satz 1.5 im Skript)

$$p_{i,k}(x) = \frac{1}{x_k - x_i} \left((x - x_i) p_{i+1,k}(x) - (x - x_k) p_{i,k-1}(x) \right)$$

und $p_{i,i}(x) = f(x_i)$ $i = 0, \dots, n$

$$p_n(x) = p_{0,n}(x)$$

(21) Alg 1.7 (Aitken - Neville)



Auswertung von $P_n(x)$: $O(n^2)$

Auswertung von $P_{n+1}(x)$, wenn n $P_{i,k}(x)$ für $0 \leq i < k \leq n$
bekannt sind: $O(n)$

(22) Nächste Vorlesung

- Restgliedabschätzung
- Fehlerabschätzung

$$\|f - p_n\|_{\infty} = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - p_n(x)|$$

$$\leq \text{?}$$

