(23) Erinnerung $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$

$$p_n \in \mathcal{P}_n : \quad p_n(x_k) = f(x_k) \quad k = 0, \ldots, n \quad (1.1)$$

- Existenz & Eindeutigkeit
- Lagrange-Darstellung: Auswertung $O(n^2)$
- Newton-Darstellung:
  - Auswerten: $O(n)$ (Horner-Schema, Alg. 1.3)
  - Bestimmung der Koeffizienten $a_i \in O(n^2)$ (Neville, Alg. 1.6)

    $a_i = f[x_0, \ldots, x_i]$
  - Hinzufügen einer Stützstelle: $O(n)$
  - direkte Auswertung $O(n^2)$ (Aitken-Neville, Alg 1.7)

(24) **Bemerkung** Falls $x_k \approx x_{k+1}$ oder $f(x_k) \approx f(x_{k+1})$, kann es in Alg 1.3 / 1.6 / 1.7 zu Auslöschung kommen.

($\rightarrow$ Stoer [3])

Heute: Restglied: $\underbrace{f(x) - p_n(x)}_{\text{Fehler untersuchen}}$

2 Quadratur

(25) 1.2 Restglied der Polynominterpolation

Ziel: Untersuchung des Interpolationsfehlers

$$f(x^*) - p_n(x^*)$$

für gegebenes $x^* \in [a,b]$.

[An den Gitterpunkten x_k gilt:
$f(x_k) - p_n(x_k) = 0$]

Vorarbeit: Notation

$$C^m[a,b] = \left\{ v \in C[a,b] \;\middle|\; \begin{array}{l} v \text{ ist } m\text{-mal differenzierbar} \\ \text{und } v^{(k)} \in C[a,b] \\ \text{für } k = 0, \dots, m \end{array} \right\}$$

$v^{(k)}$ = k-te Ableitung, d.h. $v''' = v^{(3)}$.

2.6 Erinnerung (Analysis I)

Satz 1.8 (Satz von Rolle)

Sei $f \in C^1[a,b]$ und $f(a) = f(b)$. Dann ex. $\xi \in (a,b)$ mit

$$f'(\xi) = 0.$$

Beweis **1. Fall:** $f(x) = f(a) \quad \forall x \in [a,b]$

Dann ist f konstant und es gilt $f'(x) = 0 \ \forall x \in (a,b)$.

2. Fall Dann nimmt f auf (a,b) ein relatives Minimum/Maximum an. Dort gilt $f'(\xi) = 0$. $\square$

(27) **Satz 1.9** Sei $p_n \in \mathcal{P}_n$ Lösung von (1.1) und $f \in C^{n+1}[a,b]$. Dann gibt es zu jedem $x^* \in [a,b]$ ein $\xi = \xi(x^*) \in (a,b)$ mit

(*) $$f(x^*) - p_n(x^*) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} (x^* - x_k).$$

Beweis 1. Fall: $x^* = x_k$ für ein $k = 0, \dots, n$ ✓

2. Fall: $x^* \neq x_k \ \forall k = 0, \dots, n$.

Definiere $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) := f(x) - p_n(x) - \gamma \prod_{k=0}^{n} (x - x_k).$$

(2D) $g(x) = f(x) - p_n(x) - \gamma \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)$

wobei $\gamma := \dfrac{f(x^*) - p_n(x^*)}{\prod_{k=0}^{n} (x^* - x_k)}$.

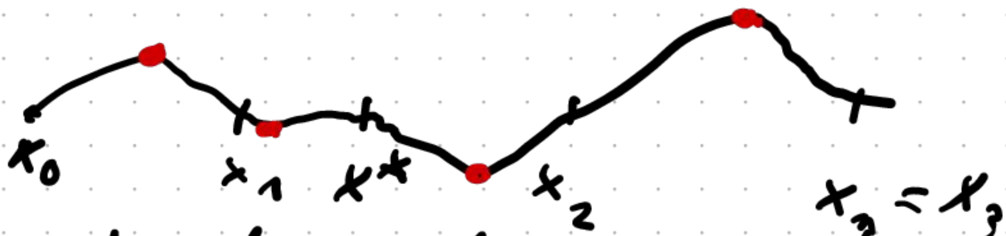
Dann gilt

$$g(x^*) = f(x^*) - p_n(x^*) - (f(x^*) - p_n(x^*)) \cdot 1$$
$$= 0.$$

Ferner gilt $g(x_k) = 0 \quad k = 0, \dots, n$

D.h. g hat mind. $n+2$ verschiedene Nullstellen in $[a,b]$.

(2g) Nach Satz von Rolle ex. also zwischen jeweils zwei Nullstellen von g eine Nullstelle der Ableitung g' geben



$\Rightarrow$ g' hat mind $n+1$ verschiedene Nullstellen in (a,b).

$\Rightarrow$ g'' – " – n – " –

...

$\Rightarrow$ $g^{(n+1)}$ – " – 1 Nullstelle in (a,b)

30 Also $0 = g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - 0 - \gamma (n+1)(n) \cdot \ldots \cdot 1$

$$= f^{(n+1)}(\xi) - \gamma (n+1)!$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}$$

$0 = g(x^*) \Rightarrow$
$$\boxed{f(x^*) - p_n(x^*) = \gamma \prod_{k=0}^{n} (x^* - x_k) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} (x^* - x_k)}$$ $\square$

<u>Konsequenz</u> $|f(x^*) - p_n(x^*)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \|\omega\|_\infty$

mit $\omega(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)$

(3) Also $$\|f - p_n\|_\infty \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \|\omega\|_\infty$$

mit $$\omega(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) .$$

<u>Beobachtung:</u> $$\frac{1}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\|f^{(n+1)}\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} \boxed{?}$$

$$\|\omega\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} \boxed{?}$$

$\|\omega\|_\infty$ hängt nur von der Wahl der Stützstellen ab.

(32) <u>Bsp</u>

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$x_k = a + \frac{b-a}{n} = -1 + hk, \quad h = \frac{2}{n}$$

(Bilder siehe Skript)

<u>Beobachtung</u> (für $[-3,3]$):

Fehler wächst für $n \to \infty$

(33) **Weiterführende Fragen:**

- Kann man die x_k so wählen, dass $\|\omega\|_\infty$ möglichst klein ist?
- Wann kann man Konvergenz

$$\|f - p_n\|_\infty \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

zeigen?

Numerik 1

34

2 Numerische Quadraturen

2.1 **Geben:** $f \in C[a,b]$

Gesucht: $I(f) := \int_a^b f(x)\,dx$

Hauptsatz: Ang. wir kennen ein $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f = F'$. Dann gilt

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Problem: Oft kann man F nur schwer/garnicht berechnen!

(35) <u>Bsp</u>:

- $\int_0^1 e^{(-x^2)}\,dx \Rightarrow$ keine geschlossene Darstellung
- $f(x)$ nicht explizit durch Formel gegeben
- F nur sehr aufwendig zu berechnen oder auszuwerten

Wir betrachten nun <u>Quadraturformeln</u> $\tilde{I}(f)$ die <u>endlich viele</u> Auswertungen von f erfordern und $I(f)$ approximieren.

36 <u>Ziel</u>: Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ finde $\tilde{I}(f)$ mit

$$|I(f) - \tilde{I}(f)| < \varepsilon. \qquad (2.11)$$

<u>Diskretisierungsfehler</u>: $|I(f) - \tilde{I}(f)|$

<u>Aufwand</u> zur Lösung von (2.11) messen wir mit: N = Anzahl der f-Auswertungen

Erfordert $\tilde{I}_N(f)$ N f-Auswertungen, dann heißt $\tilde{I}_N(f)$ <u>konvergent</u>, falls

$$|I(f) - \tilde{I}_N(f)| \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$$

(37) ... von r-ter Ordnung, falls

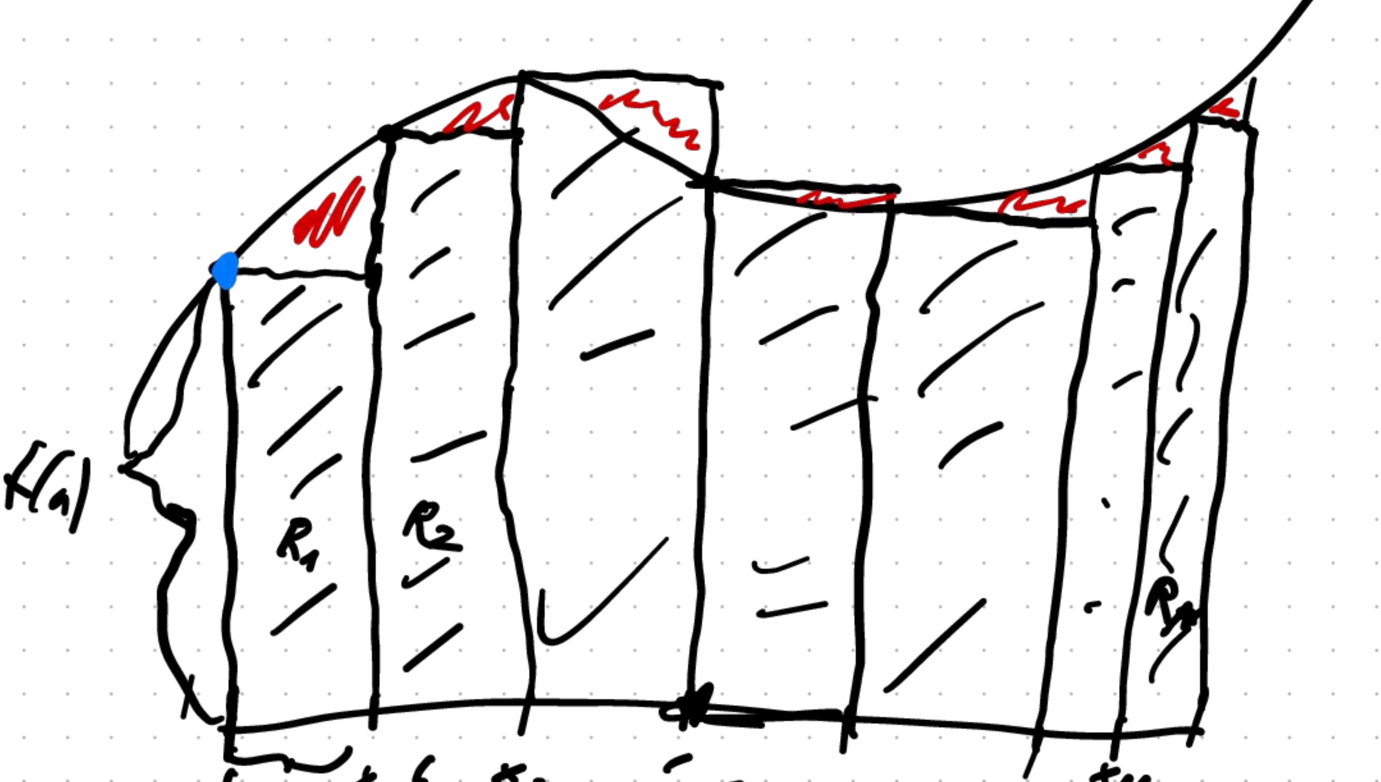
$$|I(f) - \tilde{I}_N(f)| \leq c N^{-r}.$$

Effizienz von $\tilde{I}_N(f)$:

$$\text{Genauigkeit pro Aufwand} = |I(f) - \tilde{I}_N(f)|^{-1} N^{-1}$$

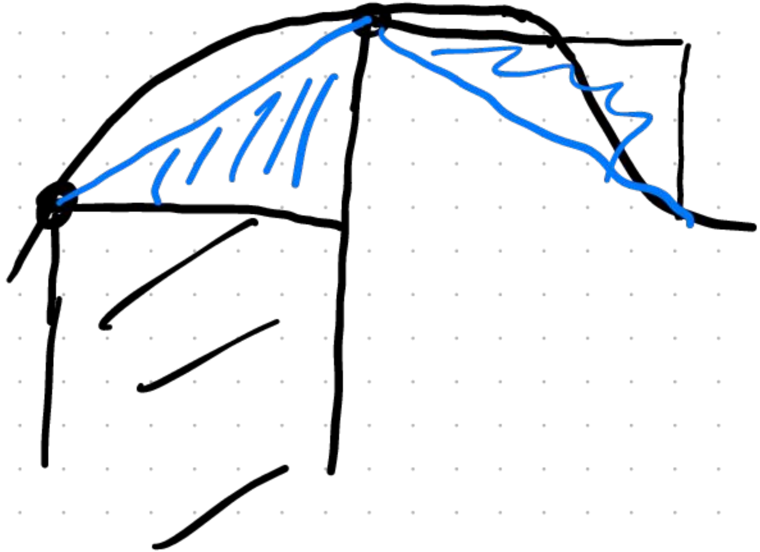
wir suchen $\tilde{I}(f)$ mit c möglichst klein, r möglichst groß.

38 **Motivation** Riemannsche Summen



$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} A(R_i) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_{i+1}-x_i)$$

79



(40) Struktureigenschaften von I:

Integrationsoperator $I : C[a,b] \to \mathbb{R}$

$$I : f \in C[a,b] \longrightarrow I(f) \in \mathbb{R}$$

- I ist linear: $I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f, g \in C[a,b]$.

- absolute Kondition von I bzg. $\|\cdot\|_\infty$ Norm

$$|I(f) - I(\tilde{f})| = \left| \int_a^b (f - \tilde{f})(x)\,dx \right|$$

$$\leq \int_a^b |f(x) - \tilde{f}(x)|\,dx \leq \|f - \tilde{f}\|_\infty \int_a^b 1\,dx = (b-a)\|f - \tilde{f}\|_\infty$$

(41) d.h. $\kappa_{abs}(I) \leq b-a$

Man kann zeigen, dass die Abschätzung scharf ist, d.h. es ex. $\forall f$ ein $\hat{f}$ mit

$$|I(f) - I(\tilde{f})| = (b-a)\,\|f-\tilde{f}\|_\infty$$

$\rightarrow$ Übung

- I ist positiv, d.h

$$f(x) \geq 0 \;\forall x \in [a,b]$$

$$\Rightarrow I(f) \geq 0$$