4.2 Erinnerung (Quadratur)

<u>Gesucht</u>: $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$

<u>Idee</u> : Approximiere $I(f)$ durch $\tilde{I}_N(f)$, was N f-Auswertungen erfordert.

<u>Eigenschaften von $I : C[a,b] \to \mathbb{R}$</u>

- I ist <u>linear</u> $\left(I(f+g) = I(f) + I(g),\ I(\alpha f) = \alpha I(f) \right)$
- <u>Absolute Kondition</u> von I ist $\kappa_{abs}(I) = b - a$, d.h.

$$\left| I(f) - I(\tilde{f}) \right| \leq (b-a) \, \| f - \tilde{f} \|_\infty \qquad (\ast)$$

- I ist <u>positiv</u>, d.h.

$$\left(f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b] \right) \Rightarrow \left(I(f) \geq 0 \right)$$

(43) Warum ist ⊗ scharf? $\tilde{f}(x) = 1 + f(x)$

$$|I(f) - I(\tilde{f})| = |I(f - (1+f))| = |I(1)|$$

$$= \left| \int_a^b -1 \, dx \right| = |(-1)(b-a)| = (b-a) \underbrace{1}_{\|f-\tilde{f}\|_\infty = \|f-(1+f)\|_\infty = \|-1\|_\infty = \max\limits_{x\in[a,b]} |-1| = 1} = (b-a)\|f-\tilde{f}\|_\infty$$

<u>Heute</u>: Herleitung von Quadraturformeln (QF)

$I_n(f)$

2.2 Globale Newton-Cotes-Formeln

(44) <u>Grundidee</u>: 1. Approximiere f durch eine „einfache" Funktion $\tilde{f}$

2. Setze $\tilde{I}(f) := I(\tilde{f})$

<u>Hoffnung</u>

- $I(\tilde{f}) = \int_a^b \tilde{f}(x)\,dx$ lässt sich einfach berechnen
- $(\tilde{f} \approx f) \Rightarrow \left(\tilde{I}(f) = I(\tilde{f}) \approx I(f)\right)$

Tatsächlich folgt aus (*)

$$|\tilde{I}(f) - I(f)| = |I(\tilde{f}) - I(f)| \leq (b-a)\,\|f - \tilde{f}\|_\infty$$

Wir benutzen <u>Interpolationspolynome</u>

um f zu approximieren!

(45) Stützstellen: $a = x_0 < \dots < x_n = b$

Approximation von f: $p_n \in \mathbb{P}_n \quad p_n(x_k) = f(x_k) \; \forall k$

Approximation von J(f):

$$J_n(f) := \int_a^b p_n(x)\,dx$$

Wir können $J_n(f)$ berechnen!

$$\int_a^b x^k dx = \left[\frac{1}{k+1} x^{k+1}\right]_a^b = \frac{1}{k+1}\left(b^{k+1} - a^{k+1}\right)$$

Aber es geht einfacher!

Lagrange-Darstellung:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k(x)$$

46

$$(*)\quad I_n(f) = I(p_n) = \int_a^b p_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k(x)\,dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \int_a^b L_k(x)\,dx$$

Allgemeine QF: $\boxed{I_n(f) = (b-a) \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\, \lambda_k}$ (2.12)

Quadraturpunkte

Quadraturgewichte

Wenn wir $(*)$ benutzen, dann verwende

$$\boxed{\lambda_k = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b L_k(x)\,dx} \qquad (2.13)$$

(47) <u>Bemerkung</u>: Wir nennen eine QF $I_n(f)$ exakt für f, wenn gilt $I(f) = I_n(f)$ für <u>dieses</u> f.

<u>Satz 2.1</u> Eine QF der Form (2.12) ist genau dann exakt für alle $f \in \mathcal{P}_n$, wenn die Gewichte von der Form (2.13) sind.

<u>Beweis</u> Oben: (2.13) $\Rightarrow$ I_n exakt $\forall f \in \mathcal{P}_n$ ✓

Sei I_n exakt $\forall f \in \mathcal{P}_n$. Wähle $f = L_j$, dann

$$I(L_j) = \int_a^b L_j(x)\,dx = I_n(L_j) = (b-a)\sum_{k=0}^{n} \underbrace{L_j(x_k)}_{\delta_{jk}} \lambda_k$$

$$= (b-a)\lambda_j \Rightarrow \lambda_j = \frac{1}{b-a}\int_a^b L_j(x)\,dx \quad (2.13).$$

$\boxed{}$

(48) Struktureigenschaften von I_n

Beobachtung: $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k = \sum_{k=0}^{n} (b-a)^{-1} \int_a^b L_k(x)\,dx$

$$= \frac{1}{b-a} \int_a^b \underbrace{\sum_{k=0}^{n} 1 \cdot L_k(x)}_{=1} dx = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

- $I_n : C[a,b] \to \mathbb{R}$ ist linear ✓

- Absolute Kondition: $\boxed{\text{Annahme: } \lambda_k \geq 0 \ \forall k}$ Donnegitt

$$|I_n(f) - I_n(\tilde{f})| \leq (b-a) \sum_{k=0}^{n} |f(x_k) - \tilde{f}(x_k)|\,|\lambda_k|$$

$$\leq (b-a) \|f-\tilde{f}\|_\infty \sum_{k=0}^{n} |\lambda_k|$$

$$\overset{\lambda_k \geq 0}{\Longrightarrow} = (b-a) \|f-\tilde{f}\|_\infty \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \lambda_k}_{=1} = (b-a) \|f-\tilde{f}\|_\infty$$

(*g*) Gleichheit gilt für $\tilde{x} = 1 + f$.

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Wenn } \lambda_k \geq 0 \ \forall k,}$ dann gilt $K_{abs}(I_n) = 6 \cdot a$

- **Positivität:**

I_n ist genau dann positiv (d.h. $f(x) \geq 0 \ \forall_x \Rightarrow I_n(f) \geq 0$) $\boxed{\text{wenn } \lambda_k \geq 0 \ \forall k \text{ gilt.}}$

$\boxed{\text{Wenn } \lambda_k \geq 0 \ \forall_k \Rightarrow \text{Alle drei Eigenschaften werden vererbt.}}$

$\Rightarrow$ Wir sind nur an QFen mit $\lambda_k \geq 0 \ \forall_k$ interessiert!

50 **Def 2.2** Eine QF der Gestalt (2.12) mit Gewichten (2.13) und äquidistanten Stützstellen

$$x_k = a + \frac{b-a}{n} k = a + hk \quad k = 0, \dots, n$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

heißt (globale) Newton-Cotes-Formel.

Die Gewichte der NC-Formeln lassen sich wie folgt berechnen:

$$\lambda_k = \frac{1}{b-a} \int_a^b L_k(x)\,dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}\,dx$$

Intervalltransformation $[a,b] \to [0,n]$

$$= \frac{1}{n} \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{z - j}{k - j}\,dz \leftarrow$$

unabhängig von $[a,b]$

51 λ_k ist unabhängig von $[a,b]$ und kann im Voraus berechnet werden

n	λ_k	Name
1	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	Trapezregel
2	$\frac{1}{6}, \frac{4}{6}, \frac{1}{6}$	Simpson-Regel
	$\vdots$	$\vdots$
5		—
6	(siehe Skript)	Weddle-Regel
7		—
8	$\ldots < 0$	—

(52) Ab $n=8$ tauchen negative λ_k auf!
NC-Formeln für $n \geq 8$ sind unbrauchbar

Nächste Vorlesung:

Fehlerabschätzungen

$$|I(f) - I_n(f)| \leq \quad \ldots$$