

(53) C. Ma I 6. Vorlesung

Erinnerung: $I_n(f) = (b-a) \sum_{k=0}^n f(\xi_k) \lambda_k$ (2.12)

$$\lambda_k = \frac{1}{b-a} \int_a^b \zeta_k(x) dx \quad (2.13)$$

(globale) $a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b \quad k=0, \dots, n$

Newton-Cotes: äquidistante x_k

$$x_k = a + k \underbrace{\frac{b-a}{n}}_h \quad k=0, \dots, n$$

→ λ_k aus Tabelle

Heute: • Fehlerabschätzungen

• summierte Newton-Cotes-Formeln.

(59) Satz 7.3¹ Sei I_n eine QF der Form (2.12)/(2.13).

Ferner sei I_n exakt für Polynome von Grad $m \geq n$, d.h. $I_n(p) = I(p) \forall p \in \mathcal{P}_m$. Dann gilt für alle $f \in C^{m+1}[a,b]$:

$$|I(f) - I_n(f)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty} (b-a)^{n+2}.$$

Beweis: Ergänze die $n+1$ Gitterpunkte x_0, \dots, x_n zu $m+1$ paarweise verschiedene Gitterpunkten x_0, \dots, x_m (d.h. ergänze $m-n$ neue Gitterpunkte in $[a,b]$).

Nun sei $q \in \mathcal{P}_m$ mit

$$q(x_k) = f(x_k) \quad \forall k=0, \dots, m.$$

(55) Nach Satz 7.9 gilt

$$f(x) = q(x) + \underbrace{\frac{f^{(m+1)}(\xi(x))}{(m+1)!}}_{r(x)} \omega(x)$$

mit $\omega(x) = \prod_{k=0}^m (x - x_k)$. Nun gilt

$$|I(f) - I_n(f)| = |I(q) + I(r) - I_n(q) - I_n(r)|$$

$$\boxed{I_n(q) = I(q)} \rightarrow \frac{1}{2} |I(r) - I_n(r)|$$

$$\boxed{r(x_k) = 0 \forall k} \rightarrow \frac{1}{2} |I(r)| = \left| \int_a^b \frac{f^{(m+1)}(\xi(x))}{(m+1)!} \omega(x) dx \right|$$

$$\leq \int_a^b \frac{|f^{(m+1)}(\xi(x))|}{(m+1)!} |\omega(x)| dx$$

$$\leq \frac{1}{(m+1)!} \|f^{(m+1)}\|_{\infty} \int_a^b |\omega(x)| dx$$

(56)

Ferner gilt

$$\int_a^b |w(x)| dx = \int_a^b \prod_{k=0}^m |x - x_k| dx \leq (b-a)^{m+2} \quad \text{Ⓚ}$$

$\leq (b-a)$

Verstärkung

$$|I(f) - I_n(f)| \leq \frac{1}{(m+1)!} \|f^{(m+1)}\|_{\infty} C_n (b-a)^{m+2}$$

mit $C_n \leq 1$.

- Berechne $\int_a^b |w(x)| dx$ statt abzuschätzen
- Wähle x_{n+1}, \dots, x_n so, dass $\int_a^b |w(x)| dx$ möglichst klein ist.

(57) Satz 2.3 Die Trapezregel I_1 ist exakt für alle $p \in \mathcal{P}_1$ und es gilt für $f \in C^2[a, b]$

$$|I(f) - I_1(f)| \leq \frac{1}{12} \|f''\|_{\infty} (b-a)^3$$

Beweis - exakt auf \mathcal{P}_1 ✓

• Wende Satz 2.3' an:

$$|I(f) - I_1(f)| \leq \frac{1}{2} \|f''\| (b-a)^3.$$

Verschärfung:

$$\int_a^b |w_k| dx = \int_a^b (x-a) (b-x) dx = \frac{1}{6} (b-a)^3 \quad \square$$

(58) Satz 2.4 Die Simpson-Regel I_2 ist für alle $p \in \mathcal{P}_3$ exakt und es gilt für $f \in C^4([a,b])$

$$|I(f) - I_2(f)| \leq \frac{1}{4!} \|f^{(4)}\|_{\infty} (b-a)^5$$

Beweis: • I_2 exakt auf \mathcal{P}_3 : Übung (allgemein)
 I_2 (Skript)

• Wende Satz 2.3' an v. □

Auch hier lässt sich die Konstante verbessern

$\frac{1}{90}$ statt $\frac{1}{4!}$ (siehe Skript).

(59) 2.9 Summierte N-C-Formeln

Seien $y_0, \dots, y_N \in [0, 1]$, $L_k(y) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^N \frac{y - y_j}{y_k - y_j}$
und $\lambda_k = \int_0^1 L_k(y) dy$

Dann ist $I_{[0,1]}(f) = \sum_{k=0}^N f(y_k) \lambda_k$

eine QF auf $[0, 1]$.

Beobachtung: $I_{[a,b]}(f) = (b-a) \sum_{k=0}^N f(a + (b-a)y_k) \lambda_k$

ist eine QF auf $[a, b]$

• $y_k \in [0, 1] \rightsquigarrow a + (b-a)y_k \in [a, b]$

sind die auf $[a, b]$ transformierten Punkte $[0, 1]$

- 60) ... • Ist $I_{[a,1]}$ exakt auf P_n ,
 (d.h. $I_{[a,1]}(p) = \int_0^1 p(y) dy \quad \forall p \in P_n$)
 so ist $I_{[a,b]}$ exakt auf P_n
 (d.h. $I_{[a,b]}(p) = \int_a^b p(x) dx \quad \forall p \in P_n$)
 \rightarrow Übergang.

Idee summierte QF_n:

- Wähle eine QF I_V für Intervalle V
- Wähle eine Gitter $a = z_0 < \dots < z_n = b$
 und Teilintervalle $V_k = [z_k, z_{k+1}] \quad k = 0, \dots, n-1$
- Wende I_{V_k} auf allen Teilintervalle V_k an

(67)

$$[a, b] = \bigcup_{k=0}^{n-1} V_k$$

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{V_k} f(x) dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} I_{V_k}(f)$$

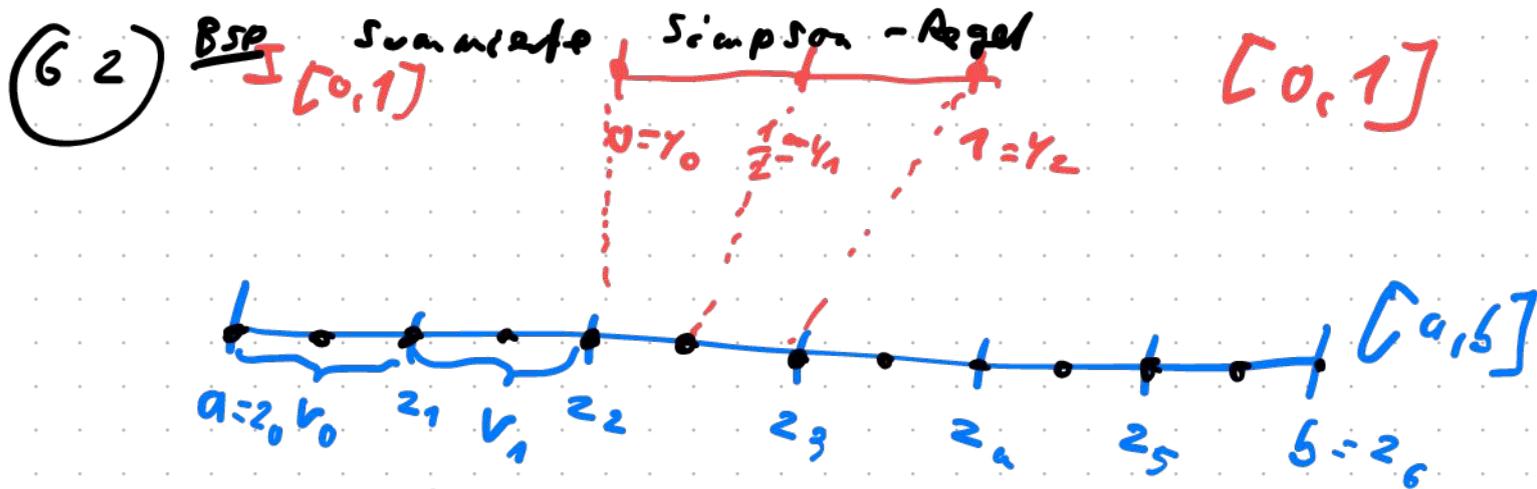
Setze also

$$S_n(f) := \sum_{k=0}^{n-1} I_{V_k}(f)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} h_k \sum_{j=0}^N f(z_k + h_k \tau_j) \tau_j$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^N f(z_k + h_k \tau_j) \tau_j h_k$$

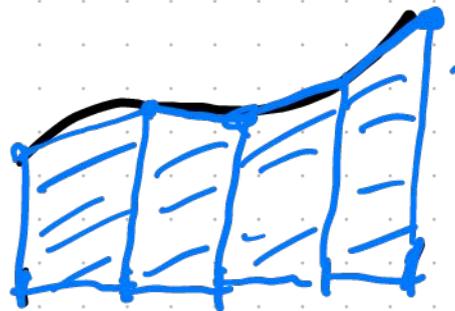
mit $h_k = z_{k+1} - z_k$
= „Länge von V_k “



$$\int_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^N f(z_k + h_k \gamma_j) h_k \lambda_j$$

BSP: globale Trapezregel

summierte Trapezregel



(63) Satz 2.5' Sei I_V exakt für Polynome vom Grad m und $f \in C^{m+1}[a,b]$. Dann gilt für die summierte QF S_n

$$|I(f) - S_n(f)| \leq \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} (b-a) \|f^{(m+1)}\|_{\infty}$$

mit $h = \max h_k$.

Beweis: $|I(f) - S_n(f)| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{V_k} f(x) dx - \sum_{k=0}^{n-1} I_{V_k}(f) \right|$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{V_k} f(x) dx - I_{V_k}(f) \right|$$

Satz 2.3 $\hookrightarrow \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(m+1)!} \|f^{(m+1)}\|_{\infty} h_k^{m+2}$

$$\begin{aligned}
 (64) \quad \dots &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(m+1)!} \|f^{(m+1)}\|_{\infty} h_k^{m+2} \\
 &\leq \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} \|f^{(m+1)}\|_{\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} h_k}_{b-a}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Veranschaulichung: Gilt für Ivsoagen

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - I_{[0,1]}(f) \right| \leq C \|f^{(m+1)}\|_{\infty} (b-a)^{m+2}$$

mit $C = \frac{1}{(m+1)!}$, das gilt auch

$$|I(x) - I_n(f)| \leq C h^{m+1} \|f^{(m+1)}\|_{\infty} (b-a).$$

(65) Sei $S_n^{(1)}(f)$ die summierte Trapezregel.

Satz 2.5 Sei $f \in C^2[a, b]$. Dann gilt für die
summierte Trapezregel $S_n^{(1)}$

$$|I(f) - S_n^{(1)}(f)| \leq \frac{h^2}{12} \|f''\|_{\infty} (b-a).$$

Beweis Wend Satz 2.5' bzw. Verschärfung
mit $\frac{1}{12}$ statt $\frac{1}{24}$ an. \square

Satz 2.6 Sei $f \in C^4[a, b]$. Dann gilt für die
summierte Simpson-Regel $S_n^{(2)}$

$$|I(f) - S_n^{(2)}(f)| \leq \frac{h^4}{90} \|f^{(4)}\|_{\infty} (b-a).$$

Beweis Satz 2.5' mit verschärfte Konst. $\frac{1}{90}$ statt $\frac{1}{24}$.

(66)

Summierte N-C-Formeln:

Wende die N-C-Formel auf jedem Teilintervall an.

Bsp: Sum. Trapezregel, äquidistanter Gitter

$$z_k = a + hk \quad \text{mit} \quad h = \frac{b-a}{n}$$

$$\begin{aligned} S_n^{(G)}(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} h \left(\frac{1}{2} f(z_k) + \frac{1}{2} f(z_{k+1}) \right) \quad (2.17) \\ &= \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (f(z_k) + f(z_{k+1})) \\ &= \frac{h}{2} (f(a) + f(b)) + h \sum_{k=1}^{n-1} f(z_k) \end{aligned}$$

(67) Bsp. semiaute Simpson-Regel, äquidistante Gitter

$$z_k = a + kh \quad , h = \frac{b-a}{n}$$

$$x_{2k+j} = z_k + j \frac{h}{2} \quad k=0, \dots, n-1, \quad j=0, \dots, 2$$

" j-te Punkt im k-ten Intervall "

$$I_{V_k} = h \left(\frac{1}{6} f(x_{2k}) + \frac{4}{6} f(x_{2k+1}) + \frac{1}{6} f(x_{2k+2}) \right)$$

$$S_n^{(2)} = \frac{h}{6} \sum_{k=0}^{n-1} \left(f(x_{2k}) + 4 f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2}) \right) \quad (2.19)$$

$$= \frac{h}{6} \left(f(x_0) + 4 f(x_1) + 2 f(x_2) + 4 f(x_3) + 2 f(x_4) \right. \\ \left. + \dots + 4 f(x_{2n-1}) + f(x_{2n}) \right)$$

(c) Globale N-C-Formel: • Fehlerabschätzung
• $n \rightarrow \infty$ i. A. nicht möglich

Summierte N-C-Formeln: • Modifiziert
• N-C auf Teilintervallen
• Fehlerabschätzung
• Fehler $\rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$

Näherstes mal: Effizienter als summierte
N-C-Formeln

Ausblick (Numerik 1): Gauß-Formeln
• nicht äquidistant
• exakt für P_{2n}