83 **Rückblick:** gew. DGL

$$x'(t) = \lambda x(t) \qquad t > 0 \qquad (3.24)$$

Satz 3.1 Alle Lösungen von (3.24) haben die Form

$$x(t) = \alpha e^{\lambda t} \qquad (3.25)$$

für $\alpha \in \mathbb{R}$.

Bem Die Lösungen von (3.24) bilden einen linearen Raum.

Etwas komplizierter: (inhomogene rechte Seite)

$$x'(t) = \lambda x(t) + f(t) \qquad t > 0 \qquad (3.26)$$

für $f \in C[0,\infty]$.

(8 4) Für $f \neq 0$ bilden die Lösungen keinen linearen Raum, denn $x(t) = 0$ ist keine Lösung von

$$x'(t) = \lambda x(t) + f(t) \qquad t > 0 \qquad (3.26)$$

Lösungen von (3.26) berechnen:

<u>Ansatz</u>: $\quad x(t) = \alpha(t) e^{\lambda t}$ (Variation der Konstante)

(<u>Motivation</u>: Sei $x(t)$ eine Lösung
Setze $\alpha(t) := \dfrac{x(t)}{e^{\lambda t}}$)

Einsetzen in (3.26)

(85) Einsetzen von $x(t) = \alpha(t) e^{\lambda t}$ in (3.26):

$$\alpha'(t) e^{\lambda t} + \alpha(t) \lambda e^{\lambda t} = x'(t) = \lambda x(t) + f(t)$$

$$= \lambda \alpha(t) e^{\lambda t} + f(t)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha'(t) e^{\lambda t} = f(t)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha'(t) = f(t) e^{-\lambda t}$$

$$\overset{HDI}{\Rightarrow} \quad \alpha(t) = \alpha(0) + \int_0^t \alpha'(\eta)\, d\eta = \alpha(0) + \int_0^t f(\eta) e^{-\lambda \eta}\, d\eta$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \alpha(0) e^{\lambda t} + \int_0^t f(\eta) e^{\lambda(t-\eta)}\, d\eta$$

(86) <u>Satz 3.2</u> Alle Lösungen von (3.26) haben die Form

$$x(t) = \alpha e^{-\lambda t} + \int_0^t f(\eta) e^{-\lambda(t-\eta)} d\eta \quad (3.27)$$

mit einer bel. Konstanten $\in \mathbb{R}$.

<u>Beweis</u> (Übung)

<u>Bem</u>: Die Lösungen von (3.26) bilden einen affinen Raum.

(87) Wir betrachten nun das Anfangswertproblem (AWP)

$$\left.\begin{aligned} x'(t) &= \lambda x(t) + f(t) \qquad 0 < t \le T \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}\right\} \quad (3.28)$$

für einen <u>Anfangswert</u> x_0

<u>Satz 3.3</u> Das AWP (3.28) hat die eindeutig bestimmte Lösung

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t} + \int_0^t f(\eta) e^{\lambda(t-\eta)} \, d\eta \quad (3.29)$$

<u>Beweis</u> Jede Lösung von (3.28a) hat die Form (3.27). Einsetzen von (3.28b) für $t=0$ ergibt

$$x_0 = x(0) = \alpha e^{\lambda 0} + \int_0^0 (\ldots) = \alpha \cdot 1 + 0 = \alpha \qquad \square$$

(88) <u>Jetzt</u>: Wie wirken Störungen der Daten aus?

(A) Störungen von x_0, (B) Störungen von f

zunächst nur (A)

<u>Satz 3.4</u> Seien $x, \tilde{x}$ Lösungen des AWPs (3.28) mit Anfangswerten $x_0, \tilde{x}_0$ und übereinstimmender rechter Seiten $f, \tilde{f}$. Dann gilt

<u>für $\lambda < 0$</u>
$$\|x - \tilde{x}\|_\infty = |x_0 - \tilde{x}_0| \quad (3.30)$$

<u>für $\lambda \geq 0$</u>
$$\|x - \tilde{x}\|_\infty = e^{\lambda T} |x_0 - \tilde{x}_0| \quad (3.31)$$

89 Beweis: Satz 3.3:

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t} + \int_0^t (\dots), \quad \tilde{x}(t) = \tilde{x}_0 e^{\lambda t} + \int_0^t (\dots)$$

$$\Rightarrow |x(t) - \tilde{x}(t)| = |x_0 - \tilde{x}_0| e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow \|x - \tilde{x}\|_\infty = \max_{t \in [0,T]} |x(t) - \tilde{x}(t)|$$

$$= |x_0 - \tilde{x}_0| \max_{t \in [0,T]} e^{\lambda t} = |x_0 - \tilde{x}_0| \cdot \begin{cases} 1 & ; \lambda < 0 \\ e^{\lambda T} & ; \lambda \geq 0 \end{cases}$$

$\square$

(90) Jetzt (A) + (B): Störungen von x_0 und f

Satz 3.5 Seien $x, \tilde{x}$ die Lösungen des AWPs (3.28) zu Anfangswerten $x_0, \tilde{x}_0$ und rechten Seiten $f, \tilde{f} \in C[0,T]$.

Dann gilt:

für $\lambda < 0$:

$$\|x - \tilde{x}\|_\infty \leq (1+T) \max\{|x_0 - \tilde{x}_0|, \|f - \tilde{f}\|_\infty\} \tag{3.32}$$

für $\lambda \geq 0$:

$$\|x - \tilde{x}\|_\infty \leq (1+T) e^{\lambda T} \max\{|x_0 - \tilde{x}_0|, \|f - \tilde{f}\|_\infty\} \tag{3.33}$$

(91) <u>Beweis</u>: Subtrahiere Lösungen $x, \tilde{x}$ aus Satz 23.3:

$$|x(t) - \tilde{x}(t)| = \left|(x_0 - \tilde{x}_0)e^{\lambda t} + \int_0^t (f(\eta) - \tilde{f}(\eta))e^{-\lambda(t-\eta)} d\eta\right|$$

$$\leq |x_0 - \tilde{x}_0| e^{\lambda t} + \int_0^t \underbrace{|f(\eta) - \tilde{f}(\eta)|}_{\leq} e^{-\lambda \underbrace{(t-\eta)}_{\in [0,t] \subseteq [0,T]}} d\eta$$

$$\leq |x_0 - \tilde{x}_0| e^{\lambda t} + \|f - \tilde{f}\|_\infty \left(\max_{\eta \in [0,T]} e^{\lambda \eta}\right) T$$

$$\|x - \tilde{x}\|_\infty \leq \left(\max_{t \in [0,T]} e^{\lambda t}\right) \max\{|x_0 - \tilde{x}_0|, \|f - \tilde{f}\|_\infty\}(1+T)$$

$$= \begin{cases} 1 & : \lambda < 0 \\ e^{\lambda T} & : \lambda \geq 0 \end{cases}$$

$\blacksquare$

92

$\underline{\lambda < 0}$

$$\|x-\tilde{x}\|_\infty \le (1+T)\max\{|x_0-\tilde{x}_0|, \|f-\tilde{f}\|_\infty\}$$

$\underline{\lambda \ge 0}$

$$\|x-\tilde{x}\|_\infty \le (1+T)e^{\lambda T}\max\{ -\text{''}- \}$$

<u>Konsequenz</u>: Für die <u>absolute Kondition</u> $\kappa_{abs}(AWP)$ des AWPs (3.28) gilt

$\underline{\lambda < 0}$ $$1 \le \kappa_{abs}(AWP) \le 1+T$$

$\underline{\lambda \ge 0}$ $$e^{\lambda T} \le \kappa_{abs}(AWP) \le (1+T)e^{\lambda T}$$

(93) D.h.

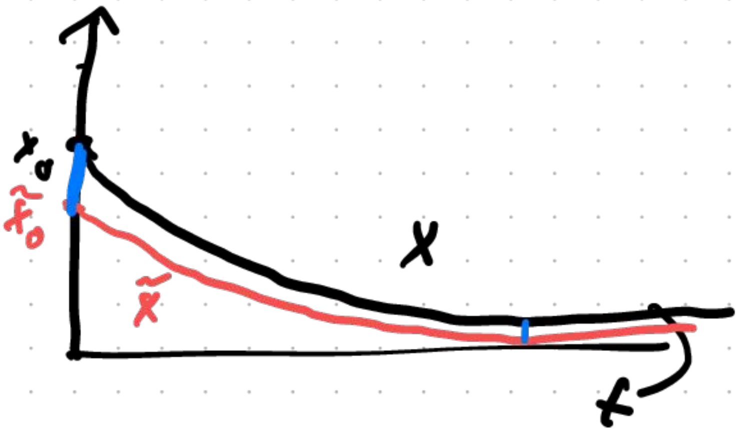
$\lambda < 0$: gut konditioniert

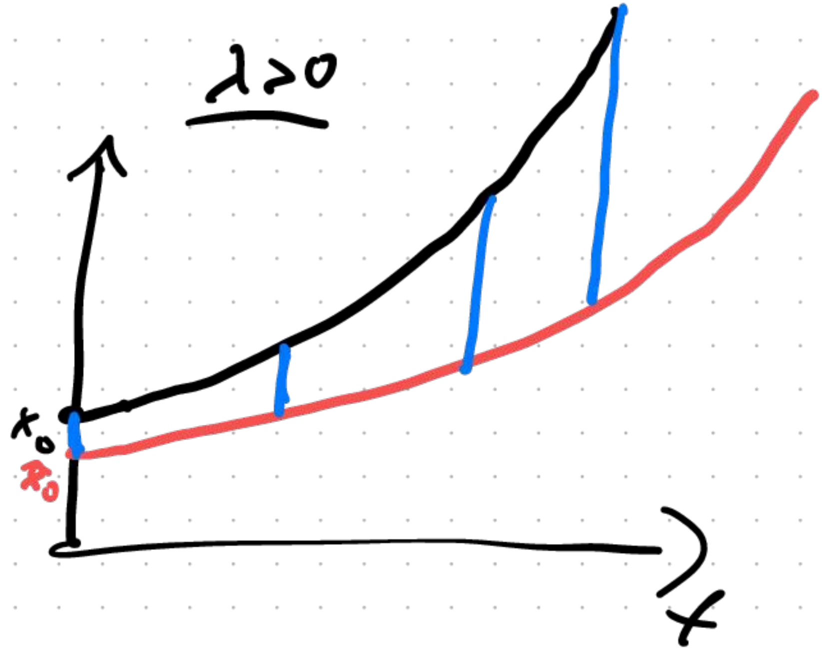
$\lambda \geq 0$: exponentielle Fehlerverstärkung

Bsp $t = 0 = \tilde{t}$

$\lambda < 0$

$\lambda > 0$





(9.4) Bemerkung

a) Satz 3.3: Existenz und Eindeutigkeit

b) Satz 3.5: Lösung hängt stetig von Daten ab

a) + b) $\Rightarrow$ AWP ist wohlgestellt.

95 3.2.2 Euler-Verfahren

Numerische Verfahren zur näherungsweisen Lösung des AWPs (3.28)

wähle ein Gitter

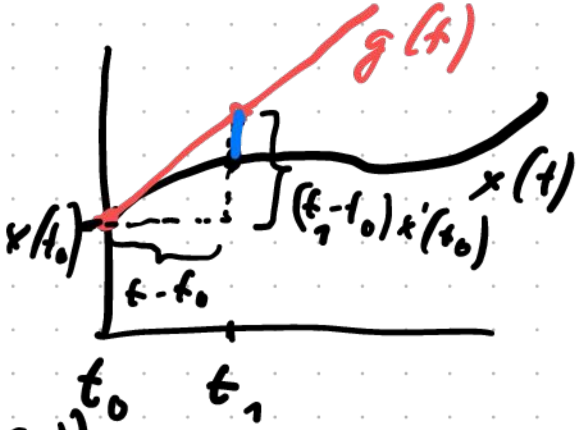
$$\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$$

Der Einfachheit halber: uniforme Schrittweite

$$\tau = t_{k+1} - t_k \qquad k = 0, \dots, n-1$$

$\Rightarrow$ äquidistantes Gitter

96 Konstruktion



Annahme: DGL gilt bis $t=0$

Tangente $g(t)$ an $x(t)$ in t_0

$$g(t) = x(t_0) + (t-t_0)\,x'(t_0)$$

$$= x(t_0) + (t-t_0)\big(\lambda x(t_0) + f(t_0)\big)$$

Einsetzen von $t_0 = 0$, $t = t_1$, $t - t_0 = t_1 - t_0 = \tau$

$$x(t_1) \approx g(t_1) = x_0 + \tau\big(\lambda x_0 + f(t_0)\big) =: x_1$$

Fortsetzen für $k = 1, 2, \dots$

$$x(t_{k+1}) \approx x(t_k) + \tau\big(\lambda x(t_k) + f(t_k)\big)$$

$$\approx \boxed{x_k + \tau\big(\lambda x_k + f(t_k)\big) =: x_{k+1}} \qquad (3.36)$$

Euler'sche Polygonzugverfahren

(97) **Gitterfunktion:** $x_\Delta : \Delta \to \mathbb{R}$

$$x_\Delta(t_k) := x_k$$

Hoffnung: $x(t_k) \approx x_\Delta(t_k) = x_k$

Beobachtung: (3.36) ist eine explizite Vorschrift zur Berechnung von x_{k+1}

$\Rightarrow$ (3.36) heißt auch explizites Euler-Verfahren

98) ex. Euler-Verfahren

vorwärtsgen. .. Diff.quotient

$$x'(t_k) \approx \frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{\tau}$$

$$\boxed{\frac{x_{k+1} - x_k}{\tau} = \lambda x_k + f(t_k)}$$

$$x_{k+1} := x_k + \tau\big(\lambda x_k + f(t_k)\big)$$

implizites Euler-Verfahren

rückwärtsgen. Diff.quot.

$$x'(t_{k+1}) \approx \frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{\tau}$$

$$\boxed{\frac{x_{k+1} - x_k}{\tau} = \lambda x_{k+1} + f(t_{k+1})}$$

$$x_{k+1} := x_k + \tau\big(\lambda x_{k+1} + f(t_{k+1})\big)$$

$$x_{k+1} = (1-\tau\lambda)^{-1}\big(x_k + \tau f(t_{k+1})\big)$$