99 **AWP** $x'(t) = \lambda x(t) + f(t) \qquad 0 < t \leq T$

$x(0) = x_0$

abs. Kondition (Satz 3.5)

$\lambda < 0$ $\quad \|x - \tilde{x}\|_\infty \leq (1+T) \max\{|x_0 - \tilde{x}_0|, \|f - \tilde{f}\|_\infty\}$

$\lambda \geq 0$ $\quad \|x - \tilde{x}\|_\infty \leq (1+T)\, e^{\lambda T} \max\{|x_0 - \tilde{x}_0|, \|f - \tilde{f}\|_\infty\}$

Heute: **Diskrete Kondition**: Auswirkung von Störungen bei Euler-Verfahren

Zunächst: Homogen: $f = 0$

(100) **Satz 3.6** Seien $x_\Delta, \tilde{x}_\Delta$ die mit dem ex. Euler berechneten Näherungen zu AWen $x_0, \tilde{x}_0$ und rechten Seiten $f = \tilde{f} = 0$. Dann gilt für $\lambda < 0$

$$\|x_\Delta - \tilde{x}_\Delta\|_\Delta \le |x_0 - \tilde{x}_0| \qquad (3.38)$$

genau dann, wenn τ die Stabilitätsbedingung

$$0 < \tau \le \frac{2}{|\lambda|} \qquad (3.39)$$

erfüllt und für $\lambda > 0$ und bel. $\tau > 0$

$$\|x_\Delta - \tilde{x}_\Delta\|_\Delta \le e^{\lambda T} |x_0 - \tilde{x}_0| \qquad (3.40).$$

(101) **Beweis**

$$x_{k+1} - \tilde{x}_{k+1} = x_k + \tau\lambda x_k - (\tilde{x}_k + \tau\lambda\tilde{x}_k)$$

$$= (1+\tau\lambda)(x_k - \tilde{x}_k)$$

$$\overset{\text{Induktion}}{\Longrightarrow} \quad x_k - \tilde{x}_k = (1+\tau\lambda)^k (x_0 - \tilde{x}_0)$$

$$\|x_\Delta - \tilde{x}_\Delta\|_\infty = \max_{k=0,\dots,n} |x_k - \tilde{x}_k|$$

$$= \max_{k=0,\dots,n} |1+\tau\lambda|^k |x_0 - \tilde{x}_0|$$

102

$\underline{\lambda < 0}$: Dann gilt $|1+\tau\lambda|^k \leq 1$

$$\Leftrightarrow |\underbrace{1+\underbrace{\tau\lambda}_{<0}}_{<1}| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq 1+\tau\lambda$$

$$\Leftrightarrow \tau \leq \frac{-2}{\lambda} = \frac{2}{|\lambda|}$$

$\underline{\lambda \geq 0}$ $|\underbrace{1+\underbrace{\tau\lambda}_{\geq 0}}_{\geq 1}|^k = (1+\tau\lambda)^k \leq \left(1+\tau\lambda+\frac{(\tau\lambda)^2}{2!}+\frac{(\tau\lambda)^3}{3!}+\dots\right)^k$

$$= \left(e^{\tau\lambda}\right)^k = e^{k\tau\lambda} = e^{t_k\lambda} \leq e^{T\lambda}.$$

(103) <u>Satz 3.4. + Satz 3.6</u> : Für $f = \tilde{f} = 0$ gilt für die absolute Kondition $K(\text{exEuler})$ des ex. Euler-Verfahrens

$$K(\text{exEuler}) \leq K(AWP)$$

$\Rightarrow$ <u>keine zusätzliche Fehlerverstärkung</u>

D.h. das ex. Euler-Verfahren ist <u>stabil</u>

<u>Achtung</u>: Für $\lambda < 0$ ist ex. Euler nur stabil, wenn die stab. Bed. $\tau \leq \frac{2}{|\lambda|}$ gilt.

(104) Falls $\lambda < 0$ und $\tau > \frac{2}{|\lambda|}$, dann gilt

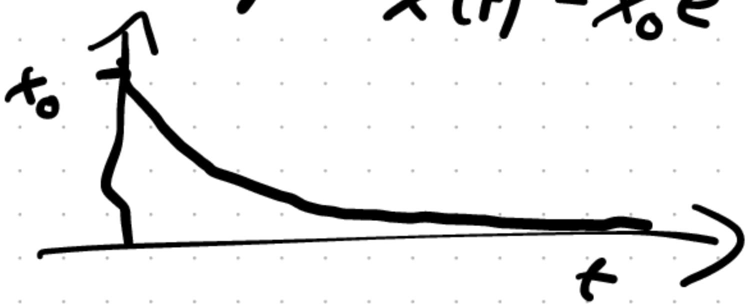
$$\|x_\Delta - \tilde{x}_\Delta\|_\infty = \sigma \, |x_0 - \tilde{x}_0|$$

mit Verstärkungsfaktor

$$\sigma = |1 + \tau\lambda|^n \gg 1 \Rightarrow \underline{\text{instabil}}$$

Was passiert genau für $\lambda < 0$ und $\tau > \frac{2}{|\lambda|}$?

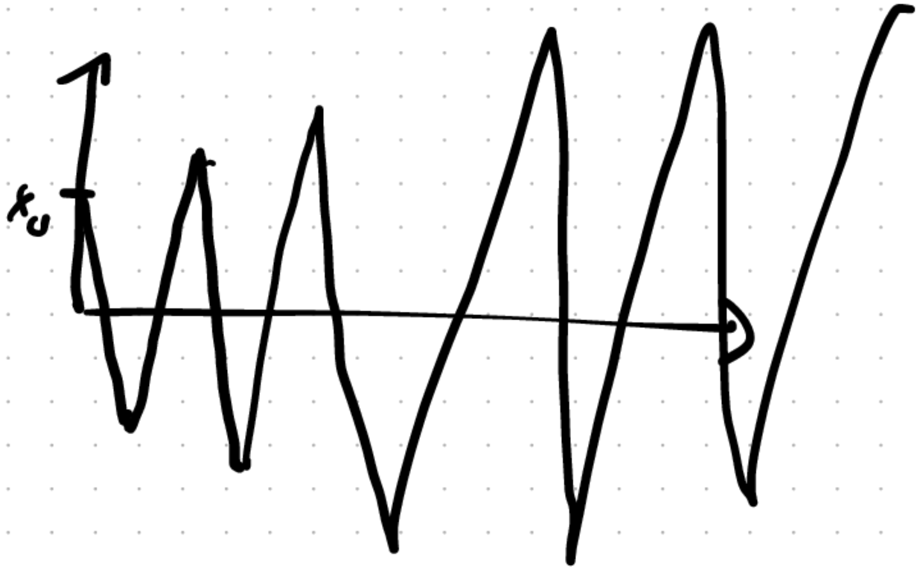
Ang $t=0$. Dann gilt $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$, d.h. $x(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$



105 ex. Euler

$$x_{k+1} = x_k + \tau\lambda x_k = \underbrace{(1+\tau\lambda)}_{<-1}{}^{k+1} x_0$$

$$\Rightarrow |x_{k+1}| = \underbrace{|1+\tau\lambda|}_{>1}{}^{k+1} |x_0|$$



106 <u>Jetzt</u> (inhomogener Fall mit Störungen) ist

<u>Satz 3.7</u> Seien $x_\Delta, \tilde{x}_\Delta$ die mit dem ex. Euler berechneten Näherungen zu AWen $x_0, \tilde{x}_0$ und rechten Seiten $f_\Delta, \tilde{f}_\Delta$ (wobei $f_\Delta = f|_\Delta$, $\tilde{f}_\Delta = \tilde{f}|_\Delta$)

Dann gilt

für $\underline{\lambda < 0}$

$$\|x_\Delta - \tilde{x}_\Delta\|_\infty \le (1+T)\max\{|x_0 - \tilde{x}_0|, \|f_\Delta - \tilde{f}_\Delta\|_\infty\}$$

falls τ die Stab. bed. (3.39) erfüllt, d.h. $\tau \le \frac{2}{|\lambda|}$

und für $\underline{\lambda \ge 0}$ und bel. $\tau > 0$

$$\|x_\Delta - \tilde{x}_\Delta\|_\infty \le (1+T)e^{\lambda T}\max\{|x_0 - \tilde{x}_0|, \|f_\Delta - \tilde{f}_\Delta\|_\infty\}.$$

107 **Beweis:** Es gilt

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= x_k + \tau\left(\lambda x_k + f(t_k)\right) \\
&= (1+\tau\lambda)\, x_k + \tau f(t_k) \\
&= (1+\tau\lambda)\left((1+\tau\lambda)\, x_{k-1} + \tau f(t_{k-1})\right) + \tau f(t_k) \\
&= (1+\tau\lambda)^2 x_{k-1} + \tau\left[(1+\tau\lambda) f(t_{k-1}) + f(t_k)\right] \\
&= (1+\tau\lambda)^3 x_{k-2} + \tau\left[(1+\tau\lambda)^2 f(t_{k-2}) + (1+\tau\lambda) f(t_{k-1}) + f(t_k)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\dots \quad x_k = (1+\tau\lambda)^k x_0 + \tau \sum_{j=0}^{k-1} (1+\tau\lambda)^{k-(j+1)} f(t_j) \qquad (3.43)
$$

168

$$x_k - \tilde{x}_k = (x_0 - \tilde{x}_0)(1+\tau\lambda)^k + \tau \sum_{j=0}^{k-1} \big(f(t_j) - \tilde{f}(t_j)\big)(1+\tau\lambda)^{k-(j+1)}$$

$$\|x_\Delta - \tilde{x}_\Delta\|_\infty = \max_{k=0,\dots,n} |x_k - \tilde{x}_k|$$

$$\le |x_0 - \tilde{x}_0| \max_{k=0,\dots,n} |1+\tau\lambda|^k + \underbrace{\tau k}_{=t_k \le T} \max_{k=0,\dots,n-1} |1+\tau\lambda|^k \cdot \max_{j=0,\dots,n-1} |f(t_j) - \tilde{f}(t_j)|$$

$$\le (1+T) \underbrace{\max_{k=0,\dots,n} |1+\tau\lambda|^k}_{\text{schätze ab wie in Satz 3.6}} \max\{|x_0 - \tilde{x}_0|, \|f_\Delta - \tilde{f}_\Delta\|_\infty\}$$

$\boxtimes$

(109) **Satz 3.6 + Satz 3.7**

$\lambda < 0$ und $\tau \le \frac{2}{|\lambda|}$:

$$1 \le \kappa_{abs}(\text{ex Euler}) \le (1+T) \quad (3.46)$$

$\lambda > 0$

$$e^{\lambda T} \le \kappa_{abs}(\text{ex Euler}) \le (1+T)e^{\lambda T} \quad (3.47)$$

$\Rightarrow$ ex. Euler ist stabil, keine zusätzliche Fehlerverstärkung.

Aber: $\lambda < 0$ erfordert stab. bed. $\tau \le \frac{2}{|\lambda|}$.

Für $|\lambda| \gg 1$ führt dies zu sehr kleinem τ.

(110) Jetzt: Implizites Euler-Verfahren.

Satz 3.8 Seien $x_\Delta, \tilde{x}_\Delta$ die mit dem im. Euler berechn.
(homogen $f=0$) Näherungen zu AWen $x_0, \tilde{x}_0$ mit $t_\Delta = \tilde{t}_\Delta = 0$.
Dann gilt für $\lambda < 0$ für bel. $\tau > 0$

$$\| x_\Delta - \tilde{x}_\Delta \| \le | x_0 - \tilde{x}_0 | .$$

Beweis $x_{k+1} = x_k + \tau \lambda x_{k+1}$

$$\Rightarrow \; x_{k+1} = (1-\tau\lambda)^{-1} x_k$$

$$\Rightarrow \; x_k = (1-\tau\lambda)^{-k} x_0$$

$$\| x_\Delta - \tilde{x}_\Delta \|_\infty = \max_{k=0,\dots,n} | x_k - \tilde{x}_k | = \underbrace{\max_{k=0,\dots,n} \underbrace{|1-\tau\lambda|}_{>1}^{-k}}_{\le 1} | x_0 - \tilde{x}_0 |$$

$\boxtimes$

(11) **Satz 3.9** Seien $x_\Delta, \tilde{x}_\Delta$ die mit dem imp. Euler berechneten Näherungen zu AWen $x_0, \tilde{x}_0$ und rechten Seiten $f_\Delta, \tilde{f}_\Delta$. Dann gilt

$$\|x_\Delta - \tilde{x}_\Delta\|_\infty \le (1+T) \max\{|x_0 - \tilde{x}_0|, \|f_\Delta - \tilde{f}_\Delta\|_\infty\}.$$

Beweis (Übung)

Für $\underline{\lambda < 0}$ und $\underline{\text{bel}}$ $\underline{\tau > 0}$ gilt

$$1 \le \kappa_{abs}(\text{im Euler}) \le (1+T)$$

$$\boxed{\text{Impliziter Euler ist stabil für } \lambda < 0 \text{ ohne Stabilitätsbed.}}$$

(112) <u>Bemerkung</u> Für $\lambda > 0$ ist beim im. Euler eine Stab. bed. notwendig, damit das Verfahren durchführbar ist.

<u>Fazit</u>: <u>$\lambda \geq 0$</u> ex. Euler stabil für alle $\tau > 0$
im. Euler nicht

<u>$\lambda < 0$</u> im Euler stabil für alle $\tau > 0$
ex. Euler nicht
(bzw. nur unter der Stab. bed.
$\tau \leq \frac{2}{|\lambda|}$)

(113) 3.2.3 Konvergenz der EuGr-Verfahren

Def 3.10 Eine Folge von Gitterfunktionen x_Δ heißt <u>Konvergent</u> gegen $x \in C[a,T]$, falls

$$\lim_{n\to\infty} \max_{k=0,\dots,n} |x(t_k) - x_k| = 0$$

und <u>Konvergent mit Ordnung p</u>, falls es ein $\tau_0 > 0$ und eine von τ unabhängige Konstante $C \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\max_{k=0,\dots,n} |x(t_k) - x_k| \leq C\tau^p. \quad \forall \tau < \tau_0.$$

(1.14) In jedem Schritt approximiert das ex. Euler-Verfahren die Lösung durch die Tangente in (t_k, x_k). Selbst für $x_k = x(t_k)$ bewirkt dies einen zusätzlichen Fehler. Da aber i.A. $x_k \neq x(t_k)$ gilt, pflanzt sich der Fehler in x_k potentiell fort.